6 Girsanov Transformation

6.1 Transformationssatz für das Wienermaß

Wir beginnen mit einem Transformationssatz für das Wienermaß. Als Ausgangspunkt betrachten wir den klassischen Wienerraum $\Omega = C([0,T])$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}\left(C[0,T]\right)$ und darauf das Wienermass P, so dass also $W_t(\omega) = \omega(t)$, $t \in [0,T]$, eine Brownsche Bewegung (bis $[0,T]$) ist.

Satz 6.1. Es sei $b_\cdot \in C([0,T])$. Definiere

$$\Phi : \Omega \to \Omega\,, \qquad \omega \mapsto \left(t \mapsto \omega(t) + \int_0^t b_s\, ds\right)\,.$$

Dann ist $P_\Phi \ll P$ mit Radon-Nikodym Dichte

$$Z_T := \exp\left(\int_0^T b_t\, dW_t - \frac{1}{2}\int_0 b_t^2\, dt\right)\,.$$

Beweis. Es sei

$$\mathcal{A}_n = \sigma\left(W_{T\frac{k}{2^n}}\,, k = 0, \ldots, 2^n\right)\,,$$

also $\mathcal{A}_n \uparrow$ mit $\bigvee_{n\geq 1} \mathcal{A}_n = \mathcal{F}_T$. Für $F = f\left(W_{\frac{1}{2^n}T} - W_0, \ldots, W_T - W_{\frac{2^n-1}{2^n}T}\right)$ gilt offenbar

$$E(F) = \int dx_1 \ldots \int dx_{2^n} \otimes_{k=1}^{2^n} N\left(0, \frac{1}{2^n}T\right)(dx_k) f(x_1, \ldots, x_{2^n})$$

und wegen

$$(F \circ \Phi)(\omega) = f\left(W_{\frac{1}{2^n}T} - W_0 + \int_0^{\frac{1}{2^n}T} b_t\, dt, \ldots, W_T - W_{\frac{2^n-1}{2^n}T} + \int_{\frac{2^n-1}{2^n}T}^T b_t\, dt\right)$$

folgt

$$\begin{aligned}
E^{P_\Phi} &= E\left(F \circ \Phi\right) = \int dx_1 \ldots \int dx_{2^n} \otimes_{k=1}^{2^n} N\left(0, \frac{1}{2^n}T\right)(dx_k) \cdot \\
&\quad \cdot f\left(x_1 + \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2^n}T} b_t\, dt}_{=:\Delta_1}, \ldots, x_{2^n} + \underbrace{\int_{\frac{2^n-1}{2^n}T}^T b_t\, dt}_{=:\Delta_{2^n}}\right) \\
&\underset{y_i = x_i + \Delta_i}{=} \int dx_1 \ldots \int dx_{2^n} \otimes_{k=1}^{2^n} N\left(0, \frac{1}{2^n}T\right)(dy_k) f(y_1, \ldots, y_{2^n}) \\
&= \int dy_1 \ldots \int dy_{2^n} \otimes_{k=1}^{2^n} N\left(0, \frac{1}{2^n}T\right)(dy_k) f(y_1, \ldots, y_{2^n}) h_n(y_1, \ldots y_{2^n})
\end{aligned}$$

mit

$$h_n\left(y_1,\dots,y_{2^n}\right)=\exp\left(\sum_{k=1}^{2^n}\frac{2^n}{T}\Delta_k y_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{2^n}{T}\Delta_k^2\right).$$

Hierbei haben wir verwandt, dass $y_i=x_i+\Delta_i$ (unabhängig) $N(\Delta_i,\frac{T}{2^n})$ verteilt ist und

$$\frac{dN(\Delta_i,\frac{T}{2^n})}{dN(0,\frac{T}{2^n})}(y)=\exp\left(\frac{\Delta_i}{T/2^n}y-\frac{1}{2}\frac{\Delta_i^2}{T/2^n}\right)\quad \text{(Übung!)}.$$

Insbesondere also:

$$E^{P_\Phi}(F)=E^P\big(F\underbrace{h_n\left(W_{\frac{1}{2^n}T}-W_0,\dots,W_T-W_{\frac{2^n-1}{2^n}T}\right)}_{=:Z_n}\big).$$

Wir haben damit gezeigt, dass $P_\Phi\ll P$ auf $\mathcal{A}_n$ mit Radon-Nikodym Dichte Z_n. Wir zeigen im folgenden, dass

$$\lim_{n\to\infty}Z_n=\exp\left(\int_0^T b_t\,dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T b_t^2\,dt\right)=Z_T$$

P-stochastisch und in $\mathcal{L}^1(P)$. Um dies einzusehen, schreiben wir

$$\begin{aligned}Z_n&=\exp\left(\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{2^n}{T}\Delta_k\right)\left(W_{\frac{k}{2^n}T}-W_{\frac{k-1}{2^n}T}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{2^n}{T}\Delta_k^2\right)\right)\\&=\exp\left(\sum_{k=1}^{2^n}b_{\frac{k}{2^n}T}\left(W_{\frac{k}{2^n}T}-W_{\frac{k-1}{2^n}T}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n}\left(b^2_{\frac{k}{2^n}T}\frac{T}{2^n}\right)\right)\exp(R_n)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}R_n&=\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{2^n}{T}\Delta_k-b_{\frac{k}{2^n}T}\right)\left(W_{\frac{k}{2^n}T}-W_{\frac{k-1}{2^n}T}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{2^n}{T}\left(\Delta_k^2-\left(b_{\frac{k}{2^n}T}\frac{T}{2^n}\right)^2\right)\\&=:I+II\,.\end{aligned}$$

Wir schätzen im folgenden die beiden Terme I und II separat ab. Zu diesem Zwecke beachte man, dass

$$\begin{aligned}\left|\Delta_k-b_{\frac{k}{2^n}T}\frac{T}{2^n}\right|&=\left|\int_{\frac{k-1}{2^n}T}^{\frac{k}{2^n}T}\left(b_t-b_{\frac{k}{2^n}T}\right)\,dt\right|\\&\le\underbrace{\sup_{|t-s|\le\frac{T}{2^n}}|b_t-b_s|}_{\to 0}\quad \text{für } n\to\infty\,,\ \text{da } b \text{ gleichm. stetig}\,.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}|II|&\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n}\sup_{|t-s|\le\frac{T}{2^n}}|b_t-b_s|\left|\Delta_k+b_{\frac{k}{2^n}T}\frac{T}{2^n}\right|\\&\le\frac{1}{2}\sup_{|t-s|\le\frac{T}{2^n}}|b_t-b_s|\left(\int_0^T|b_t|\,dt+T\|b\|_\infty\right)\to 0\,,n\to\infty\,.\end{aligned}$$

In gleicher Weise haben wir

$$
\begin{aligned}
E\left(I^2\right) &= \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{2^n}{T} \Delta_k - b_{\frac{k}{2^n}T} \right)^2 \frac{T}{2^n} \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{T}{2^n} \sup_{|t-s| \leq \frac{T}{2^n}} |b_t - b_s|^2 \to 0\,, n \to \infty\,.
\end{aligned}
$$

Also $R_n \to 0$ P-stochastisch und damit $Z_n \to Z_T$ P-stochastisch.

Für die Konvergenz in $\mathcal{L}^1(P)$ reicht nun die gleichgradige Integrierbarkeit von Z_n. Hinreichend hierfür ist, dass $(Z_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{L}^2(P)$ beschränkt ist. Dies folgt aber aus

$$
\begin{aligned}
E\left(Z_n^2\right) &= E\left(\exp\left(2 \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{2^n}{T}\Delta_k \right) \left(W_{\frac{k-1}{2n}T} - W_{\frac{k-1}{2^n}T} \right) - \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{2^n}{T}\Delta_k^2 \right) \right) \right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{2^n}{T}\Delta_k^2 \right) \right) \leq \exp\left(\int_0^T b_t^2 \, dt \right) < \infty\,.
\end{aligned}
$$

Für $A \in \mathcal{A}_n$ folgt nunmehr

$$
P\left(\Phi \in A\right) = E^{P_\Phi}\left(1_A\right) \underset{\forall m \geq n}{=} E^P\left(1_A Z_m\right) \to E^P\left(1_A Z_T\right)\,, m \to \infty\,.
$$

Folglich gilt $P_\Phi T(A) = E^P(1_A Z_T)$ für alle $A \in \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{A}_n$, also auch für alle $A \in \bigvee_{n \geq 1} \mathcal{A}_n = \mathcal{F}_T$ nach dem Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\cap$-stabilen Erzeugern. $\square$

Bemerkung 6.2. Bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_Φ ist der stochastische Prozess

$$
X_t := W_t - \int_0^t b_s \, ds\,, t \in [0,T]
$$

eine (stetige) Brownsche Bewegung. In der Tat, wir zeigen im folgenden, dass $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal unter P_Φ ist. Dann folgt die Behauptung aus der Levyschen Charakterisierung der Brownschen Bewegung. In der Tat gilt für G $\mathcal{F}_s$-messbar und $s \leq t \leq T$

$$
\begin{aligned}
E^{P_\Phi}\left(X_t G\right) &= E\big(\underbrace{X_t \circ \Phi}_{=W_t} \; \underbrace{G \circ \Phi}_{\mathcal{F}_s \text{ messbar}} \; \big) \\
&= E\left(W_s \, G \circ \Phi\right) = E^{P_\Phi}\left(X_s G\right)\,.
\end{aligned}
$$

Also ist $(X_t)_{t\in[0,T]}$ stetiges Martingal mit $\langle X \rangle_t = t$, woraus die Behauptung folgt.

Umgekehrt bedeutet das:

$$
W_t = X_t + \int_0^t b_s \, ds
$$

ist (unter P_Φ) Brownsche Bewegung mit Drift. Wir können somit das Paar (W, X) als schwache Lösung der SDGL

$$
dW_t = b_t \, dt + dX_t
$$

auffassen, und dies ist bereits eine der Hauptanwendungen der Girsanov Transformation.

6.2 Die allgemeine Girsanov-Transformation

Im gesamten Abschnitt sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtrierung (nicht notwendigerweise vervollständigt).
Wir schreiben im folgenden für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P

$$Q \underset{\text{loc}}{\ll} P \quad \text{falls} \quad Q_{|\mathcal{F}_t} \ll P_{|\mathcal{F}_t} \ \forall\, t \geq 0\,.$$

Dann existieren die Radon-Nikodym Dichten

$$Z_t := \frac{dQ}{dP}_{|\mathcal{F}t}$$

und $(Z_t)_{t\geq 0}$ ist ein (nichtnegatives) P-Martingal, denn für $A \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ gilt

$$E^P\left(Z_t 1_A\right) = Q(A) = E^P\left(Z_s 1_A\right)$$

also $E^P\left(Z_t \mid \mathcal{F}_s\right) = Z_s$.
Wir machen im folgenden stets die **Annahme**, dass Z P-f.s. stetig ist. (Im Wienerraumfall folgt dies aus dem Darstellungssatz! (siehe nächstes Kapitel))

Zur Erinnerung Ist T $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit, so folgt

$$Q = Z_T P \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}_T \cap \{T < \infty\}\,,$$

denn für $A \in \mathcal{F}_T$ gilt nach Definition $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ und damit folgt

$$\begin{aligned} Q\left(A \cap \{T \leq t\}\right) &= E\Big(\underbrace{1_{A\cap\{T\leq t\}}}_{\in \mathcal{F}_{T\wedge t}} Z_t\Big) = E\left(1_{A\cap\{T\leq t\}} Z_{T\wedge t}\right) \\ &= E\left(1_{A\cap\{T\leq t\}} Z_T\right) \underset{t\to\infty}{\to} E\left(1_{A\cap\{T<\infty\}} Z_T\right)\,. \end{aligned}$$

Lemma 6.3. Es sei

$$\xi := \inf\{t \geq 0 \mid Z_t = 0\}\,.$$

Dann gilt:

(i) $Z_t = 0$ auf $[\xi, \infty)$ P-f.s.

(ii) $\xi = +\infty$ Q-f.s. (aber nicht notwendigerweise P-f.s).

Beweis. zu (i): ξ ist $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit, denn:

$$\{\xi \leq t\} = \bigcap_{s>t} \underbrace{\{\xi < s\}}_{\in \mathcal{F}_s} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Hieraus folgt

$$E^P\left(Z_t 1_{\{\xi\leq t\}}\right) = E^P\Big(\underbrace{Z_\xi}_{=0} 1_{\{\xi\leq t\}}\Big) = 0\,.$$

zu (ii):

$$Q(\underbrace{\xi \leq t}_{\in \mathcal{F}_t}) = E^P\left(Z_t, \xi \leq t\right) = 0\,.$$

□

Lemma 6.4. (i) Ist φ_t $\mathcal{F}_t$-messbar, so gilt

$$E^Q(\varphi_t \mid \mathcal{F}_s) = 1_{\{Z_s>0\}} Z_s^{-1} E^P(\varphi_t Z_t \mid \mathcal{F}_s) \, .$$

(ii) Ist $(M_t)_{t\geq 0}$ adaptiert und stetig und $(M_t Z_t)_{t\geq 0}$ lokales P-Martingal (bis ξ), so ist $(M_t)_{t\geq 0}$ lokales Q-Martingal (bis ∞).

Beweis. ad (i): Sei φ_s $\mathcal{F}_s$-messbar, dann folgt

$$\begin{aligned} E^Q(\varphi_t\varphi_s) &= E^P(\varphi_t\varphi_s Z_t) = E^P\left(E^P(\varphi_t Z_t \mid \mathcal{F}_s)\varphi_s\right) \\ &= E^P\left(1_{\{Z_s>0\}} Z_s^{-1} E^P(\varphi_t Z_t \mid \mathcal{F}_s)\varphi_s Z_s\right) = E^Q\left(1_{\{Z_s>0\}} Z_s^{-1} E^P(\varphi_t Z_t \mid \mathcal{F}_s)\varphi_s\right) \, . \end{aligned}$$

ad (ii): Es sei $(T_n)_{n\geq 1}$ lokalisierende Folge für $(M_t Z_t)_{t\geq 0}$ bis ξ und T eine beschränkte $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit. Dann folgt

$$E^Q(M_{T\wedge T_n}) = E^P(M_{T\wedge T_n} Z_{T\wedge T_n}) = E^P(M_0 Z_0) = E^Q(M_0)$$

also $(M_t)_{t\geq 0}$ lokales Q-Martingal bis $+\infty$, da $\xi = +\infty$ Q-f.s. □

Satz 6.5. (Allg. Girsanov Transformation) Es sei M stetiges lokales P-Martingal (bis $+\infty$). Dann ist

$$\tilde{M} := M - \frac{1}{Z}.\langle M, Z\rangle = M - \int_0^{\cdot} \frac{1}{Z}_s \, d\langle M, Z\rangle_s$$

ein stetiges lokales Q-Martingal (bis $+\infty$).

Beweis. Nach Lemma 6.4 (ii) reicht es zu zeigen, dass $(\tilde{M}_t Z_t)_{t\geq 0}$ unter P ein stetiges lokales Martingal bis ξ ist. Um dies einzusehen, sei (S_n) lokalisierende Folge für M (bis $+\infty$). Weiter sei

$$\xi_n := \inf\left\{t \geq 0 \mid Z_t < \frac{1}{n}\right\} \uparrow \xi$$

da $(Z_t)_{t\geq 0}$ stetig. Damit ist $T_n := S_n \wedge \xi_n$, $n \geq 1$, eine lokalisierende Folge für M (bis ξ) und Itô's Produktregel impliziert nun

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{t\wedge T_n} Z_{t\wedge T_n} &= \tilde{M}_0 Z_0 + \int_0^{t\wedge T_n} \tilde{M}_s \, dZ_s + \int_0^{t\wedge T_n} Z_s \, d\tilde{M}_s + \langle \tilde{M}, Z\rangle_{t\wedge T_n} \\ &= M_0 Z_0 + \int_0^{t\wedge T_n} \tilde{M}_s \, dZ_s + \int_0^{t\wedge T_n} Z_s \, dM_s - \langle M, Z\rangle_{t\wedge T_n} + \langle \tilde{M}, Z\rangle_{t\wedge T_n} \, . \end{aligned}$$

Da $\tilde{M} - M = \frac{1}{Z}.\langle M, Z\rangle$ von beschränkter Variation, ist $\langle M, Z\rangle = \langle \tilde{M}, Z\rangle$ und damit $\left(\tilde{M}_t, Z_t\right)_{t\geq 0}$ lokales P-Martingal. □

Bemerkung 6.6. Z kann in exponentieller Form geschrieben werden, denn:

$$\log Z_t = \log Z_0 + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{Z_s} \, dZ_s}_{=:Y_t} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{Z_s^2} \, d\langle Z\rangle_s = \log Z_0 + Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t$$

denn Y ist ein stetiges lokales P-Martingal (bis ξ) mit quadratischer Variation $\langle Y\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{Z_s^2} \, d\langle Z\rangle_s$ und somit

$$Z_t = Z_0 \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right) \quad \text{für } \ t < \xi \, .$$

Korollar 6.7. Es sei M stetiges lokales P- Martingal (bis $+\infty$). Dann ist $M - \langle M, Y\rangle$ stetiges lokales Q-Martingal (bis $+\infty$).

Beweis. Aus $Z_t = Z_0 \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right)$ folgt $dZ_t = Z_t\, dY_t$, also

$$\frac{1}{Z_t}\langle M, Z\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{Z_s} Z_s\, d\langle M, Y\rangle_s = \langle M, Y\rangle_t\,.$$

□

6.3 Anwendung auf die Brownsche Bewegung

Wir betrachten nun die Girsanov Transformation speziell für die Brownsche Bewegung. Dazu sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung B auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, adaptiert an eine rechtsstetige Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Weiter sei

- $(b_s)_{0\leq s\leq T}$ adaptiert und produktmessbar
- $P\left(\int_0^T b_s^2\, ds < \infty\right) = 1$

Satz 6.8. (Girsanov Transformation) Es sei

$$Z_t := \exp\left(\int_0^t b_s\, dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2\, ds\right)\,, t \leq T\,.$$

Ist $E(Z_T) = 1$ und $Q := Z_T P$ auf $\mathcal{F}_T$, so ist

$$W_t = X_t - \int_0^t b_s\, ds\,, t \leq T$$

eine Brownsche Bewegung unter Q.

Beweis. Nach Annahme ist $(Z_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal bis T und $\langle X, \int_0^\cdot b_s\, dX_s\rangle_t = \int_0^t b_s\, ds$. Somit ist $W_t = X_t - \int_0^t b_s\, ds$ ein stetiges lokales Q-Martingal bis T. Da $\langle W\rangle_t = \langle X\rangle_t = t$, ist $(W_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung (unter Q). □

Bemerkung 6.9. Wie bereits für deterministische Driftterme gesehen, ist (X, W) eine schwache Lösung der SDGL

$$dX_t = b_t\, dt + dW_t\,. \tag{6.1}$$

Wir haben also insbesondere gezeigt: Ist (b_s) wie oben mit $P\left(\int_0^T b_s^2\, ds < \infty\right) = 1$ und gilt

$$E\left(\exp\left(\int_0^T b_s\, dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T b_s^2\, ds\right)\right) = 1\,, \tag{6.2}$$

so existiert eine schwache Lösung der SDGL (6.1) bis T.

Unter welcher Voraussetzung gilt (6.2)? Dazu zeigen wir im folgenden zunächst allgemein:

Satz 6.10. Es sei $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und

$$Z_t := \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right) , t \geq 0 .$$

Ist $E\left(\exp\left(\frac{\alpha}{2}\langle Y\rangle_t\right)\right) < \infty$ für ein $\alpha > 1$, so folgt $E(Z_t) = 1$.

Bemerkung 6.11. Im allgemeinen folgt immer aus dem Lemma von Fatou

$$E(Z_t) \leq \liminf_{n\to\infty} E\left(Z_{t\wedge T_n}\right) = E(Z_0) = 1$$

(bzw. allgemeiner: (Z_t) ist positives Supermartingal). Weiterhin gilt: (Z_t) ist Martingal genau dann wenn $E(Z_t) = 1$, $\forall\, t \geq 0$ (Übung!).

Beweis. (von Satz 6.10) Es sei $(T_n)_{n\geq 0}$ lokalisierende Folge für $(Y_t)_{t\geq 0}$ (bis $+\infty$). Weiter sei

$$S_n = \inf\{t \in [0,T] \mid |Y_t| > n\} \wedge T \uparrow T .$$

Dann folgt für alle $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
E&\left(\left(\exp\left(Y_{t\wedge T_n\wedge S_n} - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_{t\wedge T_n\wedge S_n}\right)\right)^{\delta}\right)\\
&= E\left(\exp\left(\delta Y_{t\wedge T_n\wedge S_n} - \frac{\delta}{2}\langle Y\rangle_{t\wedge T_n\wedge S_n}\right)\right)\\
&\underset{\substack{\text{Hölder}\\ q=\frac{1}{p-1}}}{\rightarrow} \leq \underbrace{E\left(\exp\left(\delta p Y_{t\wedge T_n\wedge S_n} - \frac{\delta^2 p^2}{2}\langle Y\rangle_{t\wedge T_n\wedge S_n}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}_{=1(!)} \cdot\\
&\qquad \cdot E\left(\exp\left(\left(\frac{p\delta^2 - \delta}{2}\right) q\langle Y\rangle_{t\wedge T_n\wedge S_n}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq E\left(\exp\left(\left(\frac{p\delta - 1}{p-1}\right)\frac{p\delta}{2}\langle Y\rangle_t\right)\right)^{\frac{1}{q}} .
\end{aligned}$$

Wähle nun $\delta, p > 1$ so nahe an 1, dass

$$\frac{p\delta - 1}{p-1} p\delta \leq \alpha .$$

Dann folgt für diese Wahl von δ und p, dass

$$E\left(\left(Z_{t\wedge T_n\wedge S_n}\right)^{\delta}\right) \leq E\left(\exp\left(\frac{\alpha}{2}\langle Y\rangle_t\right)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty .$$

Somit ist $Z_{t\wedge T_n\wedge S_n}$, $n \geq 1$, gleichgradig integrierbar und somit

$$E(Z_t) = \lim_{n\to\infty} E\left(Z_{t\wedge T_n\wedge S_n}\right) = 1 .$$

□

Im Falle der Brownschen Bewegung gilt also:

Korollar 6.12. Gilt für $\alpha > 1$

$$E\left(\exp\left(\frac{\alpha}{2}\int_0^T b_s^2\,ds\right)\right) < \infty \tag{6.3}$$

so ist

$$E\left(\exp\left(\int_0^T b_s\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T b_s^2\,ds\right)\right) = 1\,.$$

Insbesondere gibt es eine schwache Lösung der SDGL (6.1).

Bemerkung 6.13. In beiden Aussagen reicht $\alpha = 1$ (siehe [KS91]). Der Beweis wird jedoch in diesem Grenzfall wesentlich schwieriger. Für $\alpha = 1$ heißt die Bedingung (6.3) **Novikov-Bedingung**.

Schwache Lösungen stochastischer Differentialgleichungen

Folgender Satz verallgemeinert die Bemerkung 6.9 zur Konstruktion schwacher Lösungen auf den Fall allgemeiner Dispersionsmatrizen.

Satz 6.14. Es sei (X_t) Lösung der SDGL

$$dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t$$

mit

$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times r}$, $(W_t)_{t\geq 0}$ r-dimensionale Brownsche Bewegung.

Es sei $a : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein weiteres Vektorfeld. Angenommen, es gibt eine Abbildung

$$u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$$

mit

$$\sigma(t, x)u(t, x) = b(t, x) - a(t, x) \tag{6.4}$$

so dass $Y_T := -\int_0^T u(s, X_s)\,dW_s$ wohldefiniert ist mit

$$E\left(\exp\left(Y_T - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_T\right)\right) = 1\,.$$

Dann ist unter $Q = Z_T P$ auf $\mathcal{F}_T$

$$\tilde{W}_t := W_t + \int_0^t u(s, X_s)\,ds\,, t \leq T$$

eine Brownsche Bewegung und $(X, \tilde{W})$ ist eine schwache Lösung der SDGL

$$dX_t = a(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t\,.$$

Beweis. Unter Q ist $(\tilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ Brownsche Bewegung (bis T) nach Satz 6.8. Also folgt die Behauptung aus:

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t \\ &= b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,d\tilde{W}_t - \sigma(t, X_t)u(t, X_t)\,dt \\ &= a(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,d\tilde{W}_t\,. \end{aligned}$$

□

Beispiel 6.15. Ist $r = d$ und $\sigma(t, x)$ invertierbar (in x), so setze

$$u(t, x) = \sigma^{-1}(t, x)\left(b(t, x) - a(t, x)\right)\,.$$

7 Itô's Darstellungssatz

7.1 Hauptresultat

Im ganzen Abschnitt sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung. Im folgenden bezeichne

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma\left(\{W_s \mid s \in [0,t]\}\right), t \geq 0\,,$$

die von $(W_t)_{t\geq 0}$ erzeugte Filtration.

Wir haben im Kapitel zur stochastischen Integration gesehen, dass für $H \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W)$ das stochastische Integral

$$(H \cdot W)_t = \int_0^t H_s dW_s$$

wohldefiniert und wieder ein (stetiges) $\mathcal{L}^2$-beschränktes Martingal (bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) ist. Nun gilt sogar umgekehrt:

Theorem 7.1. (Itô's Darstellungssatz) Es sei $M = (M_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ rechtsstetiges $(\mathcal{F}_t^0)$-Martingal. Dann ist

$$M_t = E(M_0) + \int_0^t H_s\, dW_s$$

für H $\bar{\mathcal{F}}$-messbar, adaptiert mit $H \cdot 1_{[0,t]} \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W)$ für alle $t \geq 0$. Insbesondere hat M P-f.s. stetige Pfade (!).

Zum Beweis des Darstellungssatzes benötigen wir einige Vorbereitungen:

Lemma 7.2. Es sei $T > 0$. Dann ist die Menge

$$\left\{\phi\left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}\right) \mid t_j \in [0,t], \phi \in C_b^\infty\left(\mathbb{R}^n\right), n \geq 1\right\}$$

dicht in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)$.

Beweis. Es sei $\{t_m\}_{m\geq 1} \subseteq [0,T]$ dicht und

$$\mathcal{A}_n := \sigma\left\{\left(W_{t_m} \mid 1 \leq m \leq n\right)\right\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}_n$ aufsteigend mit $\bigvee_{n\geq 1} \mathcal{A}_n = \mathcal{F}_T^0$.

Für $G \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)$ folgt aus dem Martingalkonvergenzsatz

$$\lim_{n\to\infty} E\left(G \mid \mathcal{A}_n\right) = G \quad \text{in } \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)\,.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ aber gilt

$$E\left(G \mid \mathcal{A}_n\right) = g_n\left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}\right)$$

für $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbar.

Jedes dieser $g_n(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ kann approximiert werden in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ durch Zufallsvariablen der Form

$$\phi\left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}\right) \quad \text{mit } \phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

□

Lemma 7.3. Die lineare Hülle der Zufallsvariablen

$$Z(h) = \exp\left(\int_0^T h(t)\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(t)\,dt\right), \quad h \in \mathcal{L}^2([0,T])$$

liegt dicht in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)$.

Beweis. Haben zu zeigen: $G \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)$ mit

$$E\left(Z(h)G\right) = 0 \qquad \forall\ h \in L^2([0,T]) \Rightarrow G = 0\,.$$

Für

$$h = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{i+1})\, 1_{]t_i, t_{i+1}]}\,, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}\,, 0 = t_0 < t_1 < \ldots\,,$$

folgt insbesondere

$$G(\lambda) := E\left(\exp\left(\lambda_1 W_{t_1} + \ldots + \lambda_n W_{t_n}\right) G\right) = 0\,.$$

Die Funktion G ist reell analytisch in $\lambda \in \mathbb{R}^n$ und besitzt daher eine analytische Fortsetzung $G(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, gegeben durch

$$G(z) = E\left(\exp\left(z_1 W_{t_1} \ldots + z_n W_{t_n}\right) G\right)\,.$$

Aus $G = 0$ auf $\mathbb{R}^m$ folgt daher auch $G = 0$ auf $\mathbb{C}^n$. Insbesondere ergibt sich

$$G(iy_1, \ldots, iy_n) = E\left(\exp\left(iy_n W_{t_1} + \ldots + iy_n W_{t_n}\right) G\right) = 0$$

für alle $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und damit $E(G \mid \mathcal{A}_n) = 0$. Dies folgt aus

$$G(iy_1, \ldots, iy_n) = \left(\exp\left(iy_1 W_{t_1} + \ldots + iy_n W_{t_n}\right) g_n\left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}\right)\right) = 0$$

und der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion.

Nach dem Martingalkonvergenzsatz ist

$$G = \lim_{n\to\infty} E\left(G \mid \mathcal{A}_n\right) \quad \text{in } \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)$$

und damit folgt $G = 0$. □

Satz 7.4. Es sei $F \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)$. Dann gibt es $H \in \mathcal{L}^2\left(\bar{\Omega}, \bar{F}, P_W\right)$, adaptiert, mit

$$F = E(F) + \int_0^T H_s\, dW_s\,.$$

Beweis. Zunächst habe F die Form $Z(h) = Z_T(h)$ mit

$$Z_t(h) = \exp\left(\int_0^t h(s)\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(s)\,ds\right), \qquad h \in L^2([0,T])\,.$$

Dann folgt aus der zeitabhängigen Itô-Formel

$$dZ_t(h) = h(t) Z_t(h)\, dW_t$$

also

$$Z_t(h) = 1 + \int_0^T h(s) Z_s(h)\, dW_s.$$

Insbesondere folgt

$$Z(h) = \underbrace{E(Z(h))}_{=1} + \int_0^T \underbrace{h(s) Z_s(h)}_{\text{adaptiert}} dW_s$$

und nach Lemma 7.3 gibt es für alle $F \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)$ eine Folge F_n von Linearkombinationen von $Z(h)$'s mit $F_n \to F$ in $\mathcal{L}^2$. Zu F_n gibt es $H_n \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W)$, adaptiert, mit

$$F_n = E(F_n) + \int_0^T H_{n,s}\, dW_s\,.$$

Aufgrund der Wiener-Itô Isometrie gilt

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T (H_{n,s} - H_{m,s})^2\, ds\right) &= E\left((F_n - E(F_n) - F_m - (F_m))^2\right) \\ &= E\left((F_n - F_m)^2\right) - \left(E\left(F_n - F_m\right)\right)^2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0\,. \end{aligned}$$

Folglich ist $(H_n) \subseteq \mathcal{L}^2\left(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W\right)$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Es sei $H := \lim_{n\to\infty} H_n$. Dann folgt, H ist adaptiert, und

$$F = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} E(F_n) + \int_0^T H_{n,s}\, dW_s = E(F) + \int_0^T H_s\, dW_s\,.$$

□

Beweis von Satz 7.1. Für $F = M_T$ gibt es nach Satz 7.4 ein $H^T \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W)$ mit

$$M_T = E(M_0) + \int_0^T H_s^T\, dW_s\,.$$

Insbesondere für $t \leq T$:

$$M_t = E(M_0) + \int_0^t H_s^T\, dW_s\,. \tag{7.1}$$

Für $t \leq T_1 \wedge T_2$ haben wir außerdem

$$E\left(\int_0^t \left(H_s^{T_1} - H_s^{T_2}\right)^2\, ds\right) = E\left(\left(\int_0^t H_s^{T_1} dW_s - \int_0^t H_s^{T_2} dW_s\right)^2\right) = 0\,. \tag{7.2}$$

Daher ist

$$H_s := H_s^n\,, \quad s \in [0,n]\,, P_W\text{-f.s. wohldefiniert}\,.$$

Weiterhin ist H_s $\bar{\mathcal{F}}$-messbar und adaptiert, und $H_s 1_{[0,T]} \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W)$ für alle $T \geq 0$. Aus (7.1) und (7.2) folgt ausserdem

$$M_t = E(M_0) + \int_0^t H_s\, dW_s \qquad \forall t \geq 0\,.$$

□

Bemerkung 7.5. Der Itôsche Darstellungssatz lässt sich auf den d-dimensionalen Fall wie folgt verallgemeinern:

Ist $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})$ eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}^d$ und ist $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\left(W_s \mid s \in [0,t]\right)$, so gibt es zu jedem rechtsstetigen $(\mathcal{F}_T^0)$-Martingal $M = (M_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, einen $\bar{\mathcal{F}}$-messbaren, adaptierten Prozess $H = (H^{(1)}, \dots, H^{(d)})$ mit $H1_{[0,T]} \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W)$ und

$$M_t = E\left(M_0\right) + \sum_{i=1}^{d} \int T_0 H_s^{(i)}\, dW_s^{(i)}\,.$$

Insbesondere lässt sich jedes Funktional $F \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T^0, P)$ darstellen als stochastisches Integral

$$F = E(F) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^T H_s^{(i)}\, dW_s^{(i)}$$

für einen $\bar{\mathcal{F}}$ - messbaren, adaptierten Prozess $H = (H^{(1)}, \dots, H^{(d)}) \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W)$.

7.2 H-Differenzierbarkeit

Wir betrachten im folgenden das kanonische Modell der Brownschen Bewegung auf dem Wienerraum $E := \Omega := C([0,1])$, $W_t(\omega) = \omega(t)$ und P das Wienermaß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Wir erinnern daran, dass E ein Banachraum ist, d.h., ein vollständiger normierter Verktorraum, bzgl. $\|\omega\| := \max_{t\in[0,1]} |\omega(t)|$.

Der (topologische) Dualraum E' von E ist der Raum aller stetigen linearen Funktionale $l : E' \Rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 7.6. (i) $W_t : E \to \mathbb{R}$ ist stetiges lineares Funktional. Beachte: dieses können wir schreiben in der Form

$$W_t(\omega) = \int_0^1 \omega d\delta_t\,.$$

(b) Allgemeiner: Ist μ ein signiertes Maß auf $[0,1]$ von endlicher Variation, so ist

$$\omega \mapsto \int \omega d\mu \ \text{ ein stetiges lineares Funktional.}$$

Dies sind nach dem folgenden Satz schon alle stetigen linearen Funktionale:

Satz 7.7. (Riesz-Radon) Die Abbildung

$$\begin{aligned} &J : \{\mu \mid \mu \text{ signiertes Maß auf } [0,1] \text{ von endl. Variation}\} \to E' \\ &\mu \mapsto \left(\omega \mapsto \int \omega d\mu\right) \end{aligned}$$

ist ein linearer stetiger isometrischer Isomorphismus.

Definition 7.8. Eine Funktion $F : E \to \mathbb{R}$ heißt **Fréchet-differenzierbar** in $\omega \in E$, falls

$$\exists\ F'(\omega) \in E' \text{ mit } F(\omega + \eta) - F(\omega) = F'(\omega)(\eta) + O(\|\eta\|) \quad \forall \eta \in E\,. \tag{7.3}$$

MaW, $\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}(F(\omega + \lambda\eta) - F(\omega) = F'(\omega)(\eta)\ \forall \eta \in E$.

Beispiel 7.9. (a) $F(\omega) = \int_0^1 \omega(t)f(t)\,dt$, $f \in L^1([0,1])$ ist Fréchet-differenzierbar in ω mit $F'(\omega)(dt) = f(t)\,dt$, denn $F(\omega+\eta) - F(\omega) = \int_0^1 \eta(t)f(t)\,dt$.

(b) $F(\omega) = \max_{t\in[0,1]} \omega(t)$ ist **nicht** überall Fréchet-differenzierbar. Beispielsweise gilt in $\omega = 0$ mit

$$h_1(t) = \begin{cases} 2(2t) \wedge (1-2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$$

und $h_2(t) = h_1(1-t)$, dass

$$F(\omega + \lambda(h_1+h_2)) = \lambda = F(w + \lambda h_i)$$

und damit

$$F'(\omega)(h_1+h_2) = 1 \neq F'(\omega)(h_1) + F'(\omega)(h_2)\,.$$

Wir schwächen daher den Differenzierbarkeitsbegriff ab, indem wir (7.3) nicht für alle $\eta \in E$ sondern nur für alle $\eta \in H$ fordern, wobei

$$\begin{aligned} H &= \{h \in E \mid h(0) = 0, h \text{ absolutstetig,} \dot{h} \in L^2([0,1])\} \\ &= \text{"Cameron-Martin-Raum"} \subseteq E\,. \end{aligned}$$

Dann ist H ein Hilbertraum bzgl. $\langle h, g\rangle_H := \int_0^1 \dot{h}(s)\dot{g}(s)\,ds$.

Beachte: für $h \in H$ gilt

$$\begin{aligned} F'(\omega)(h) &= \int_0^1 h(t)F'(\omega)(dt) = \int_0^1 \int_0^t \dot{h}(s)ds F'(\omega)(dt) \\ &= \int_0^1 \dot{h}(s) \underbrace{F'(\omega,]s,1])}_{=:D_sF(\omega)} ds = \int_0^1 D_sF(\omega)\dot{h}(s)\,ds\,. \end{aligned}$$

Definition 7.10. $F \in \mathcal{L}^2(P)$ heißt **H-differenzierbar**, falls $\forall$ $(\dot{h}_s)_{s\in[0,1]}$ adaptiert, produktmessbar, beschränkt und

$$h_t(\omega) := \int_0^t \dot{h}_s(\omega)\,ds\,, \quad 0 \le t \le 1\,,\ \in H$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left(F(\omega+\lambda h) - F(\omega)\right) = \int_0^1 D_sF(\omega)\dot{h}_s(\omega)\,ds \in \mathcal{L}^2(P)$$

für einen produktmessbaren Prozess DF.

Beispiel 7.11. $F(\omega) = \max_{t\in[0,1]} \omega(t)$ ist H-differenzierbar mit $D_tF(\omega) = 1_{\{T>t\}}(\omega)$. Hierbei ist $T := \inf\{t > 0 \mid \omega(t) = F\}$ (!)

Zum Beweis beachte, dass $F(\omega) = \omega(T(\omega))$, also

$$\frac{1}{\lambda}(F(\omega+\lambda h) - F(\omega)) = \frac{1}{\lambda}\left(\omega(T(\omega+\lambda h)) - \omega(T(\omega))\right) + h(T(\omega+\lambda h))$$

und

$$\begin{aligned} h(T(\omega+\lambda h)) &= \int_0^{T(\omega+\lambda h)} \dot{h}_s\,ds = \int_0^{T(\omega)} \dot{h}_s\,ds + \int_{T(\omega)}^{T(\omega+\lambda h)} h_s\,ds \\ &= \int_0^1 D_sF(\omega)\dot{h}_s\,ds + \int_{T(\omega)}^{T(\omega+\lambda h)} \dot{h}_s\,ds\,. \end{aligned}$$

Nun zeigt man $T(\omega+\lambda h) \to T(\omega)$, $\lambda \to 0$, P-f.s. mithilfe des Girsanov Theorems (Übung!) und wegen

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{\lambda}(F(\omega+\lambda h) - F(\omega)) - \int_0^1 D_s F(\omega)\dot{h}_s\,ds\Big| \\
&\quad = \Big|\frac{1}{\lambda}(\omega(T(\omega+\lambda h) + \lambda h(T(\omega+\lambda h))) - \frac{1}{\lambda}(\omega(T(\omega)) + \lambda h(T(\omega)))\Big| \\
&\quad \overset{!}{=} \frac{1}{\lambda}\left(\omega(T(\omega+\lambda h)) + \lambda h(T(\omega+\lambda h))\right) - \frac{1}{\lambda}\left(\omega(T(\omega)) + \lambda h(T(\omega))\right) \\
&\quad \leq h\left(T(\omega+\lambda h)\right) - h(T(\omega)) \qquad \text{wegen } \omega(T(\omega+\lambda h)) \leq \omega(T(\omega)) \\
&\quad = \int_{T(\omega)}^{T(\omega+\lambda h)} \dot{h}_s\,ds \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left|T(\omega+\lambda h) - T(\omega)\right|^{\frac{1}{2}} \|\dot{h}\|_{L^2([0,1])} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

P-f.s. und wegen $|T(\omega+\lambda h) - T(\omega)| \leq 1$ auch in $\mathcal{L}^2(P)$.

Den folgenden Satz beweist man mithilfe der Girsanov-Transformation:

Satz 7.12. (partielle Integration auf dem Wienerraum)
Es sei F H-differenzierbar und h und $\dot{h}$ wie in Definition 7.10. Dann gilt

$$E\left(\int_0^1 D_s F \dot{h}_s\,ds\right) = E\left(F\int_0^1 \dot{h}_s\,dW_s\right).$$

Beweis. Offensichtlich ist die linke Seite gleich $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda}E\left(F(W+\lambda h) - F(W)\right)$.
Definiere

$$Z_t^\lambda = \exp\left(\lambda\int_0^t \dot{h}_s\,dW_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t \dot{h}_s^2\,ds\right), \lambda\in\mathbb{R}.$$

Dies ist nach Korollar 6.12 ein Martingal (in $\mathcal{L}^2(P)$). Aus Satz 6.8 folgt, dass unter dem Maß $Q = Z_1^\lambda P$ der Prozess

$$X_t^\lambda := W_t - \lambda\int_0^t \dot{h}_s\,d_s = W_t - \lambda h_t$$

eine Brownsche Bewegung (bis $T=1$) ist, und daher folgt

$$E^P\left(F\left(X^\lambda\right)Z_1^\lambda\right) = E^Q\left(F\left(X^\lambda\right)\right) = E^P\left(F(X^0)\right) \quad \forall\,\lambda.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\lambda}E\left(F\left(X^\lambda\right)Z_1^\lambda - F\left(X^0\right)\right) \\
&= E\Big(\underbrace{\frac{1}{\lambda}\left(F\left(X^\lambda\right) - F\left(X^0\right)\right)}_{\underset{\lambda\downarrow 0}{\to} -\langle D.F,\dot{h}\rangle_{L^2([0,1])}}\underbrace{Z_1^\lambda}_{\underset{\lambda\downarrow 0}{\to}1}\Big) + E\Big(F\left(X^0\right)\underbrace{\frac{1}{\lambda}\left(Z_1^\lambda - 1\right)}_{\underset{\lambda\downarrow 0}{\to}\int_0^1 h_s\,dW_s}\Big) \\
&\underset{\lambda\downarrow 0}{\to} -E\left(\langle D.F,\dot{h}\rangle\right) + E\left(F\int_0^1 \dot{h}_s\,dW_s\right) \quad \text{in } \mathcal{L}^2(P).
\end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen:

$$\frac{1}{\lambda}\left(Z_1^\lambda - 1\right) \underset{\lambda\downarrow 0}{\to} \int_0^1 \dot{h}_s\,dW_s \quad \text{in } \mathcal{L}^2(P).$$

Dies folgt aus

$$Z_1^\lambda = 1 + \lambda \int_0^1 Z_s^\lambda \dot{h}_s \, dW_s$$

denn dies impliziert

$$E\left(\left(\frac{1}{\lambda}\left(Z_1^\lambda - 1\right) - \int_0^1 \dot{h}_s \, dW_s\right)^2\right) = E\left(\left(\int_0^1 \left(Z_s^\lambda - 1\right) \dot{h}_s \, dW_s\right)^2\right)$$

$$\underset{\text{Itô-Isometrie}}{=} E\left(\int_0^1 \left(Z_s^\lambda - 1\right)^2 \dot{h}_s^2 \, ds\right)\right) \leq \|\dot{h}_s\|_\infty^2 \int_0^1 \underbrace{E\left((Z_s^\lambda - 1)^2\right)}_{\to 0} ds$$

aufgrund des Konvergenzsatzes von Lebesgue. □

Damit sind wir nun in der Lage, den Integranden im Darstellungssatz von Itô zu identifizieren:

Satz 7.13. (Clark-Formel) Es sei $F \in \mathcal{L}^2(P)$ H-differenzierbar. Dann gilt

$$F = E(F) + \int_0^1 E(D_t F \mid \mathcal{F}_t) \, dW_t \quad P\text{-f.s.}$$

Hierbei ist $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^0 \vee \mathcal{N}$, $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\left(W_s \mid s \in [0,t]\right)$, und $\mathcal{N}$ bezeichnet alle Teilmengen von P-Nullmengen in $\sigma\left(W_s \mid s \in [0,\infty)\right)$.

Beweis. Wir können oBdA $E(F) = 0$ annehmen. Es sei $G \in \mathcal{L}^2(P)$. Dann gibt es einen Prozess $u \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, P_W)$ mit

$$G = E(G) + \int_0^1 u_s \, dW_s \, .$$

Es sei weiter $u_n := (-n) \vee u \wedge n$, $n \geq 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
E(FG) &= \lim_{n\to\infty} E\left(F \int_0^1 u_{n,t} \, dW_t\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left(F \int_0^1 D_t F u_{n,t} dt\right) \qquad \text{(part. Int.)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 E\left(D_t F u_{n,t}\right) \, dt = \int_0^1 \underbrace{E(D_t F u_t)}_{=E(E(D_t F|\mathcal{F}_t)u_t)} \, dt \\
&= E\left(\int_0^1 E(D_t F \mid \mathcal{F}_t) u_t \, dt\right) \\
&\underset{\text{Itô-Isometrie}}{=} E\left(\int_0^1 E(D_t F \mid \mathcal{F}_t) \, dW_t \int_0^1 u_t \, dW_t\right) \\
&= E\left(\int_0^1 E\left(D_t F \mid \mathcal{F}_t\right) \, dW_t \, G\right) .
\end{aligned}$$

□

Beispiel 7.14. (a) $F(\omega) = \int_0^1 \omega(s) f(s)\, ds \in \mathcal{L}^2(P)$ $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ ist Fréchet-differenzierbar mit $D_t F(\omega) = \int_t^1 f(s)\, ds = E(D_t F \mid \mathcal{F}_t)$. Also:

$$F = \underbrace{E(F)}_{=0} + \int_0^1 \left(\int_t^1 f(s) ds \right) dW_t \,.$$

Dies folgt natürlich auch aus Itô's Produktregel wegen

$$\int_0^1 \int_t^1 f(s)\, dW_t \underset{\text{Randterme=0}}{=} - \int_0^1 W_t \underbrace{d\left(\int_t^1 f(s) ds \right)}_{=-f(t)\,dt} = \int_0^1 W_t f(t)\, dt \,.$$

(b) $F(\omega) = f(W_1(\omega)) = f(\omega(1))$ für $f \in C_b^1(\mathbb{R})$. Dann folgt $F'(\omega)(\eta) = f'(\omega(1))\eta(1)$, also $F'(\omega)(dt) = f'(\omega(1))\delta_1(dt)$ und $D_t F(\omega) = F'(\omega)(]t,1]) = f'(W_1)$ für $t < 1$. Somit haben wir die Darstellung

$$f(W_1) = E\left(f(W_1)\right) + \int_0^1 E\left(f'(W_1) \mid \mathcal{F}_t\right) dW_t \,.$$

Aus der Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung folgt

$$E\left(f'(W_1) \mid \mathcal{F}_t\right) = p_{1-t} f'(W_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}} \int f'(W_t + y) \exp\left(-\frac{y^2}{2(1-t)}\right) dy \,.$$

Setzen wir noch

$$h(t,x) := P_{1-t} f(x)$$

so sehen wir, dass h Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \frac{1}{2} h_{xx} + h_t & = 0 \\ h(\cdot, 1) & = f \end{cases}$$

ist, mit $h_x = p_{1-t} f'(x)$, und damit

$$E\left(f'(W_1) \mid \mathcal{F}_t\right) = h_x(W_t, t) \,.$$

(c) $F(\omega) = \max_{0 \le t \le 1} \omega(t)$

Haben bereits gesehen: $D_t F(\omega) = 1_{\{T > t\}}(\omega)$ mit

$$T(\omega) = \inf\{t \ge 0 \mid \omega(t) = F(\omega)\} \,.$$

Es folgt

$$E(D_t F \mid \mathcal{F}_t) = P(T > t \mid \mathcal{F}_t) = P\left(\max_{0 \le s \le t} W_s > M_t \mid \mathcal{F}_t \right)$$

mit $M_t = \max_{0\le s\le t} W_s$. Wir haben in den Übungen gesehen, dass $P_{M_t} = P_{|W_t|}$ und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
P\left(\max_{t\le s\le 1} W_s > M_t \mid \mathcal{F}\right) &= P\big(\max_{t\le s\le 1} \underbrace{W_s - W_t}_{\substack{=:\hat{W}_{s-t}\,,s\ge t,\,\text{BB}\\ \text{unabhängig von } \mathcal{F}_t!}} > M_t - W_t \mid \mathcal{F}_t\big) \\
&= P\left(\hat{M}_{1-t} > M_t - W_t \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}}\int_{M_t-W_t}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2(1-t)}\right)\,dy \\
&= 2\left(1-\Phi\left(\frac{M_t-W_t}{\sqrt{1-t}}\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Beispiel 7.15. (Black & Scholes Formel zur Optionspreisberechnung) Wir betrachten das Black & Scholes Modell

$$\begin{aligned}
dB_t &= rB_t\,dt\,, \quad B_0 = 1 \\
dS_t &= \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t\,, S_0 \ge 0
\end{aligned}$$

bestehend aus einer festverzinslichen Anleihe mit Wert B_t und einer Aktie mit Wert S_t zur Zeit t. Hierbei ist $(W_t)_{t\ge 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Betrachte den "abdiskontierten" Preisprozess

$$\hat{S}_t := B_t^{-1} S_t = \exp(-rt) S_t\,.$$

Dann erfüllt $\hat{S}_t$ die SDGL

$$d\hat{S}_t = (\mu - r)\hat{S}_t\,dt + \sigma\hat{S}_t\,dW_t\,. \tag{7.4}$$

Betrachte in diesem Modell eine Option auf den Kauf einer Aktie zur Zeit T zum Preis q. Die zugehörige Auszahlungsfunktion ist $F = (S_T - q)^+$, die abdiskontierte Auszahlung ist $\hat{F} = B_T^{-1}F = \left(\hat{S}_T - qB_T^{-1}\right)^+$.

Zur Bestimmung des fairen Preises der Option konstruieren wir ein replizierendes Portfolio $(\beta_s, \Delta_s)_{s\in[0,T]}$ mit

- β_s = Anteil der festverzinslichen Anleihe
- Δ_s = Anteil an Aktien,

so dass

1) keine Kosten außer Anfangsinvestitionen entstehen, dh die Anlagestrategie ist **selbstfinanzierend**,
2) der Wert des Portfolios zur Zeit T gleich $\hat{F}$ ist.

Damit die Anlagestrategie selbstfinanzierend ist, muss für die Kosten C_t des Portfolios gelten

$$\begin{aligned}
C_t &\approx \sum_{t_i \le t} \left(\Delta_{t_i} - \Delta_{t_{i-1}}\right) \hat{S}_{t_i} + \left(\beta_{t_i} B_{t_i} - \beta_{t_{i-1}} B_{t_{i-1}}\right) \\
&= -\sum_{t_i \le t} \Delta_{t_i} \left(\hat{S}_{t_{i+1}} - \hat{S}_{t_i}\right) + \Delta_t \hat{S}_t - \Delta_0 \hat{S}_0 + \beta_t B_t - \beta_0 \underbrace{B_0}_{=1} \\
&\to -\int_0^t \Delta_s \, d\hat{S}_s + \Delta_t \hat{S}_t - \Delta_0 \hat{S}_0 + \beta_t B_t - \beta_0 \\
&= -\Delta_0 \hat{S}_0 - \beta_0 \,,
\end{aligned}$$

dh, die Kosten sind mit dieser Wahl konstant gleich der Anfangsinvestition. Damit ergibt sich der faire Preis der Option als der Wert des Portfolios zur Zeit $t = 0$, also der Anfangsinvestition, da sich andererseits Arbitragemöglichkeiten eröffnen, dh, Chancen auf risikolosen Gewinn/Verlust. Da sich der Wert des Portfolios zur Zeit $t \le T$ berechnet zu

$$\Delta_t \hat{S}_t + \beta_t = (\Delta_0 S_0 + \beta_0) + \int_0^t \Delta_s \, d\hat{S}_s$$

ergibt sich für das replizierende Portfolio

$$\hat{F} = (\Delta_0 S_0 + \beta_0) + \int_0^t \Delta_s \, d\hat{S}_s \,.$$

Wir wollen nun diese Darstellung mit der Clark-Formel für $\hat{F}$ vergleichen. Dazu müssen wir erst $\hat{S}_t$ zu einer Brownschen Bewegung machen, was wir durch einen geeigneten Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes P zu Q, definiert durch

$$\frac{dQ}{dP_{|\mathcal{F}_t}} = G_t \quad \text{mit } G_t := \exp\left(-\frac{\mu - r}{\sigma} W_t - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} t\right) , t \ge 0$$

erreichen. In der Tat, nach Satz 6.8 ist

$$\hat{W}_t := W_t + \frac{\mu - \tau}{\sigma} t \,, t \ge 0$$

Brownsche Bewegung unter Q. Aus (7.4) wird nun

$$d\hat{S}_t = \sigma \hat{S}_t d\hat{W}_t \,, \text{ dh } \hat{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma \hat{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

und dies ist offenbar ein Q-Martingal.

Auch wenn die Funktion $f(x) = \left(\exp\left(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - q B_T^{-1}\right)^+$ nicht in $C_b^1(\mathbb{R})$ liegt, kann man durch Approximation mit glatten Funktionen zeigen, dass $\hat{F}$ H- differenzierbar ist mit

$$D_s \hat{F} = B_T^{-1} 1_{[q,\infty)} \left(S_T - q\right) \sigma S_T = 1_{[q,\infty)}(S_T - q) \sigma \hat{S}_T \,.$$

Nach der Clarkschen Formel gilt dann

$$\begin{aligned} B_T^{-1}\left(S_T-q\right)^+ &= \left(\hat{S}_T - qB_T^{-1}\right)^+ \\ &= B_T^{-1}E^Q\left((S_T-q)^+\right) + \int_0^T E^Q\left(1_{[q,\infty)}(S_t-q)\sigma\hat{S}_t \mid \mathcal{F}_t\right) d\hat{W}_t \\ &= \underbrace{B_T^{-1}E^Q\left((S_T-q)^+\right)}_{=:\Delta_0\hat{S}_0+\beta_0} + \int_0^T \underbrace{\frac{1}{\sigma\hat{S}_t}E^Q\left(1_{[q,\infty)}\left(S_t-q\right)\sigma\hat{S}_t \mid \mathcal{F}_t\right)}_{=:\Delta_t} d\hat{S}_t\,. \end{aligned} \tag{7.5}$$

(7.5) spezifiziert, wie der Anteil an Aktien in einem Portfolio auszusehen hat, dessen Ertrag zur Zeit T mit dem Ertrag aus der Option übereinstimmt. Damit ergibt sich als fairer Preis der Option gerade

$$\begin{aligned} P_0 &= B_T^{-1}E^Q\left((S_T-q)^+\right) = e^{rT}E^Q\left(\left(\hat{S}_Te^{rT}-q\right)^+\right) = E^Q\left(\left(\hat{S}_T - qe^{-rT}\right)^+\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left(S_0\exp\left(\sigma\sqrt{T}y-\frac{1}{2}\sigma^2T\right)-qe^{-rT}\right)^+ e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\,. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Beachte, dass

$$\begin{aligned} S_0\exp\left(\sigma\sqrt{T}y-\frac{1}{2}\sigma^2T\right) \geq qe^{-rT} &\Leftrightarrow \sigma\sqrt{T}y \geq \log\left(\frac{q}{S_0}\right)+\left(\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)T \\ \underset{\text{für } \sigma>0}{\Leftrightarrow}\ y \geq \frac{1}{\sqrt{T\sigma^2}}\left(\log\left(\frac{q}{S_0}\right)+\left(\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)T\right) &= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{T\sigma^2}}\left(\log\left(\frac{S_0}{q}\right)+T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}_{=\rho_-(T,S_0)}\,. \end{aligned}$$

Einsetzen in (7.6) liefert

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left(S_0\exp\left(\sigma\sqrt{T}y-\frac{1}{2}\sigma^2T\right)-qe^{-rT}\right)^+ e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\rho_-(T,S_0)}^{\infty} S_0\exp\left(-\frac{(y-\sigma\sqrt{T})^2}{2}\right)dy - qe^{-rT}\Phi\left(\rho_-(T,S_0)\right) \\ &= S_0\Phi\big(\underbrace{(\rho_-(T,S_0)+\sigma\sqrt{T})}_{=:\rho_+(T,S_0)}\big) - qe^{-rT}\Phi\left(\rho_-(T,S_0)\right)\,. \end{aligned}$$

(vgl. mit Beispiel 5.16 aus Kapitel 5).

Zur Berechnung von Δ_t

Es sei h eine Lösung des Randwertproblems

$$h_t + \frac{1}{2}\sigma^2x^2h_{xx} = 0,\ \ h(x,T) = f(x) \tag{7.7}$$

Dann folgt aus der zeitabhängigen Itô-Formel:

$$dh(\hat{S}_t,t) = h_x(\hat{S}_t)\,d\hat{S}_t\,,$$

also

$$(S_T - q)^+ = h\left(\hat{S}_T, T\right) = h(S_0, 0) + \int_0^T h_x(\hat{S}_t, t)\, d\hat{S}_t$$
$$= h(S_0, 0) + \int_0^T h_x(\hat{S}_t, t)\sigma \hat{S}_t\, d\hat{W}_t\,.$$

Aus der Eindeutigkeit im Itôschen Darstellungssatz folgt

$$h_x\left(\hat{S}_t, t\right)\sigma \hat{S}_t = E^Q\left(D_t\hat{F} \mid \mathcal{F}_t\right)\,,$$

also

$$\Delta_t = H_x(\hat{S}_t, t)\,.$$

(7.7) kann explizit gelöst werden (Fall $r = 0$ in der Black & Scholes Formel, "abdiskontierte" Black & Scholes PDE).