Mehrdeutigkeiten des eindimensionalen Phasenrekonstruktionsproblems

ROBERT BEINERT

GEORG-AUGUST-Universität Göttingen

24. Rhein-Ruhr-Workshop
31. Januar 2014

Phasenrekonstruktion

Problemstellung

Rekonstruktion einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus

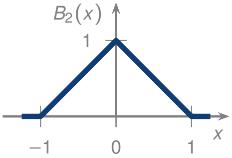
$$\left|f(x)\right| \qquad \text{und} \qquad \left|\widehat{f}(\xi)\right|$$

Definition (Fourier-Transformation)

$$\mathcal{F}[f] := \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

Spline-Funktion

Definition (Zentrierter linearer B-Spline)



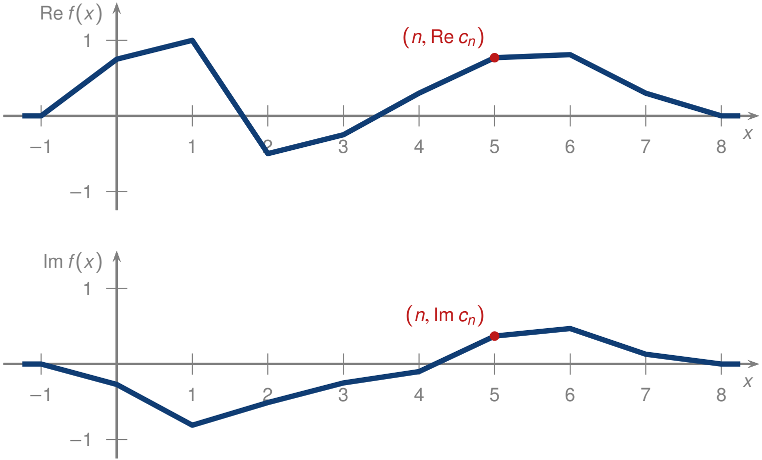
$$B_2(x) := \begin{cases} 1 - |x| & -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition (Spline-Funktion)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, B_2(x-n) \qquad (x \in \mathbb{R}, c_n \in \mathbb{C})$$

Spline-Funktion

Beispiel (Spline-Funktion)



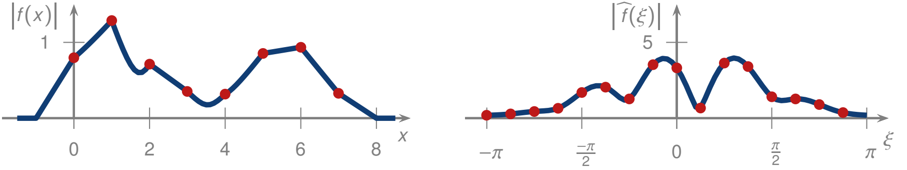
Phasenrekonstruktion

Problemstellung für Spline-Funktionen

Phasenrekonstruktionsproblem

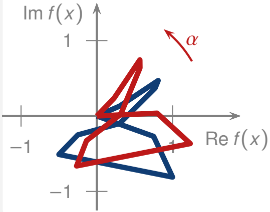
Rekonstruiere die lineare Spline-Funktion f aus den Daten

$$\left|f\left(n\right)\right| \quad \left(n = 0, \dots, N-1\right) \quad \text{und} \quad \left|\widehat{f}\left(\tfrac{k\pi}{N}\right)\right| \quad \left(k = -N, \dots, N-1\right).$$



Triviale Mehrdeutigkeiten

Beispiel (Drehung)



Ist f eine Lösung, dann ist $e^{i\alpha} f$ für beliebiges $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ebenfalls eine Lösung.

Beispiel (Konjugation)

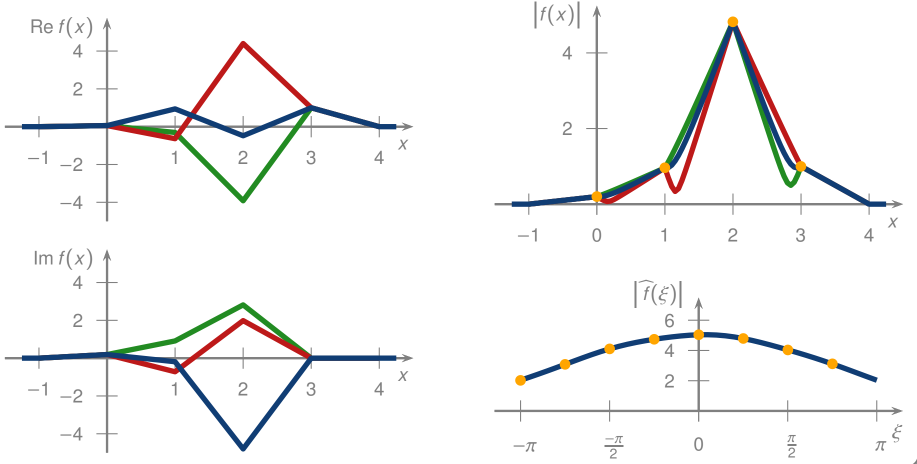
Ist f eine Lösung und $|\hat{f}|$ ist gerade, dann ist $e^{i\alpha} \overline{f}$ für beliebiges $\alpha \in (-\pi, \pi]$ eine weitere Lösung.

Beispiel (Spiegelung)

Ist f eine Lösung und f ist reell, so ist $f(-\cdot)$ auch eine Lösung.

Nicht triviale Mehrdeutigkeiten

Beispiel (Nicht triviale Mehrdeutigkeiten)



Konstruktion von Mehrdeutigkeiten

Definition (Faltung)

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, \mathrm{d}y$$

Satz (Yang Wang [2013])

Sei f eine beliebige Funktion und g auf eine der folgenden Weisen definiert:

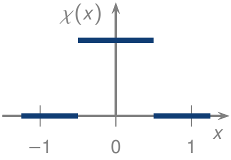
- $g = \overline{f(-\cdot)}$,
- $g = f(\cdot - a)$ *für* $a \in \mathbb{R}$,
- $f = f_1 * f_2$ *und zum Beispiel* $g = \overline{f_1(-\cdot)} * f_2(\cdot - a)$,

dann ist $\left|\widehat{g}\right| = \left|\widehat{f}\right|$.

Darstellung Spline-Funktion durch Faltung

Fakt (Zentrierter linearer B-Spline)

$$B_2(x) = \chi * \chi(x) \quad \textit{mit} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$



Fakt (Translation)

$$f(x-n) = (f * \delta_n)(x) \qquad \textit{mit} \qquad \delta_n(x) := \delta_0(x-n),$$

wobei δ_0 die DIRAC*-Delta-Distribution ist.*

Darstellung Spline-Funktion durch Faltung

Definition (Zugehöriges Polynom)

Das zur linearen Spline-Funktion

$$f(x) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n B_2(x-n)$$

zugehörige Polynom ist

$$P_f(z) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n z^n = c_{N-1} \prod_{j=1}^{N-1} (z-\gamma_j) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Darstellung Spline-Funktion durch Faltung

- Spline-Funktion im Zeitbereich

$$f(x) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, B_2(x-n) = \left(\chi * \chi * \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, \delta_n \right)(x)$$

- FOURIER-Transformation

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\operatorname{sinc}\left(\tfrac{\xi}{2}\right)\right)^2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} c_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi n} \right) = \left(\operatorname{sinc}\left(\tfrac{\xi}{2}\right)\right)^2 P_f\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\right)$$

Darstellung Spline-Funktion durch Faltung

- Faktorisierung des zugehörigen Polynoms

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\operatorname{sinc}\left(\tfrac{\xi}{2}\right)\right)^2 \cdot c_{N-1} \prod_{j=1}^{N-1} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} - \gamma_j\right)$$

- Rücktransformation

$$f(x) = c_{N-1} \left(\chi * \chi * \mathop{\Huge *}_{j=1}^{N-1} (\delta_1 - \gamma_j \, \delta_0) \right)(x)$$

Manipulation der Faktoren

- Konjugation und Spiegelung

$$\overline{\left(\delta_1 - \gamma_j\,\delta_0\right)(-x)} = \left(\delta_1 - \overline{\gamma}_j\,\delta_0\right)(-x) = \left(\delta_{-1} - \overline{\gamma}_j\,\delta_0\right)(x)$$

- Darstellung von Mehrdeutigkeiten $\left(K_1 \cup K_2 = \{1, \ldots, N-1\}\right)$

$$g(x) := c_{N-1}\left(\chi * \chi * \left[\mathop{\Large\ast}_{k\in K_1} \left(\delta_1 - \gamma_k\,\delta_0\right)\right] * \left[\mathop{\Large\ast}_{k\in K_2} \left(\delta_0 - \overline{\gamma}_k\,\delta_1\right)\right]\right)(x)$$

$$\widehat{g}(\xi) = \left(\operatorname{sinc}\left(\tfrac{\xi}{2}\right)\right)^2 \cdot \underbrace{c_{N-1}\left[\prod_{k\in K_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} - \gamma_k\right)\right]\left[\prod_{k\in K_2}\left(1 - \overline{\gamma}_k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\right)\right]}_{=P_g(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}$$

Darstellung von Mehrdeutigkeiten

Nullstellenmenge des zugehörigen Polynoms

Satz (LANGEMANN, TASCHE [2008])

Sind die Spline-Funktionen f und g mit $c_0 c_{N-1} \neq 0$ Lösungen, dann ist

$$\left|P_f(z)\right| = \left|P_g(z)\right| \qquad \left(z \in \Gamma := \{|z| = 1\}\right).$$

Diese Eigenschaft ist äquivalent zu

$$\left|P_f(z_0)\right| = \left|P_g(z_0)\right| \qquad \text{für ein } z_0 \in \Gamma$$

und die Mengen

$$\left(\gamma_j, \left(\overline{\gamma}_j\right)^{-1} : j = 1, \ldots, N-1\right)$$

von P_f und P_g sind bis auf Permutation gleich.

Darstellung von Mehrdeutigkeiten

Kombination Nullstellenmenge und Faltung

Satz (BEINERT [2013])

Sei

$$f(x) := C\left(\chi * \chi * \mathop{\Large *}_{j=1}^{N-1} (\delta_1 - \gamma_j\,\delta_0)\right)(x)$$

eine Lösung und g eine weitere Lösung des Problems. Dann besitzt g bis auf eine unimodulare Konstante eine Darstellung der Form

$$g(x) := C\left(\chi * \chi * \left[\mathop{\Large *}_{k\in K_1} (\delta_1 - \gamma_k\,\delta_0)\right] * \left[\mathop{\Large *}_{k\in K_2} (\delta_0 - \overline{\gamma}_k\,\delta_1)\right]\right)(x)$$

mit einer Partition $K_1 \cup K_2 = \{1, \ldots, N-1\}$ *und* $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

▸ Beispiel (Reelles Problem)

Ausblick

- Auszeichnung einer Mehrdeutigkeit als Lösung
- Bedingungen an die Koeffizienten oder Nullstellen des zugehörigen Polynoms für Ein- und Mehrdeutigkeit
- Verallgemeinerung auf höhere Splines und andere Funktionen
- Übertragung auf mehrdimensionale Phasenrekonstruktionsprobleme

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Phasenrekonstruktion

Problemstellung für reelle Spline-Funktionen

Phasenrekonstruktionsproblem

Rekonstruiere die lineare reelle Spline-Funktion

$$f(x) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n B_2(x-n) \qquad (x \in \mathbb{R}, c_n > 0)$$

aus den Daten

$$\left| \hat{f}\left(\frac{k\pi}{N}\right) \right| \quad (k = -N, \dots, N-1).$$

Nicht triviale Mehrdeutigkeiten

Beispiel (Mehrdeutigkeiten für das reelle Problem)