

Galerkin-Diskretisierung von
Eigenwertproblemen für partielle
Differentialgleichungen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
an der
Technischen Universität Berlin



Verfasser: Christian Heier
Matrikelnummer: 320294
Betreuer: Dr. Kersten Schmidt

Vorgelegt am 12. Dezember 2011

Erklärung

Die selbständige und eigenhändige Anfertigung versichert an Eides statt
Berlin, den 12. Dezember 2011

Unterschrift

Zusammenfassung

Wir betrachten in dieser Arbeit die Approximation der Lösung von variationellen Eigenwertproblemen mittels Galerkin-Diskretisierung. Das Hauptaugenmerk ist hierbei auf die von Babuška und Osborn in [2] dargestellte Theorie über Konvergenz und Konvergenzordnung der Galerkinapproximation kompakter Eigenwerte und Eigenvektoren gerichtet. In den letzten Abschnitten werden die vorher gewonnenen Resultate direkt auf die Finite-Elemente-Methode für symmetrischen, positive Eigenwertprobleme elliptischer Differentialoperatoren angewendet und die Konvergenzaussagen anhand einer konkreten Implementierung des Laplace Eigenwertproblems mithilfe der Finiten-Elemente-Bibliothek *Concepts* untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	6
1.1	Lineare stetige und kompakte Operatoren	6
1.2	Dualräume und adjungierte Operatoren	9
1.3	Konvergenz von Operatoren	10
1.4	Spektraltheorie kompakter Operatoren	12
1.5	Störungstheorie linearer, abgeschlossener Operatoren	16
2	Kompakte variationelle Eigenwertprobleme	23
2.1	Problemstellung und ein erstes Beispiel	23
2.2	Formulierung als Operator Eigenwertproblem	25
3	Galerkin-Approximation des kompakten Eigenwertproblems	29
3.1	Galerkin Approximation	29
3.2	Konvergenz des diskreten Problems gegen das kontinuierliche Problem	33
4	Die Babuška-Osborn Theorie über spektrale Konvergenz	38
4.1	Spektrale Approximation kompakter Operatoren	38
4.2	Spektrale Approximation variationeller Eigenwertprobleme	51
5	Symmetrische variationelle Eigenwertprobleme	57
5.1	Untersuchung des symmetrischen Falls	58
5.2	Implementierung des Laplace Eigenwertproblems in <i>Concepts</i>	61
A	Quellcode zum numerischen Experiment	68

Einleitung

Viele Probleme in Physik- und Ingenieurwissenschaften, lassen sich in Form von Eigenwertproblemen von Differentialoperatoren formulieren. Ein prominentes Beispiel hierfür ist die stationäre Schrödingergleichung aus der theoretischen Physik. In den seltensten Fällen jedoch lassen sich diese Eigenwertgleichungen analytisch lösen und so muss auf Näherungsverfahren zurück gegriffen werden.

Eine Möglichkeit, mit der wir uns in dieser Arbeit auseinandersetzen wollen ist die Verwendung der Galerkinapproximation die vorallem in ihrer prominentesten Form, der Finiten Elemente Methode bei der Lösung partieller Differentialgleichungen große Anwendung findet. Hierbei wird das (Differential-) Operatoreigenwertproblem mittels Galerkinapproximation, durch ein endlichdimensionales Operatoreigenwertproblem (Matrixeigenwertproblem) angenähert, das dann mit den numerischen Verfahren zum Lösen von Matrixeigenwertproblemen gelöst werden kann. Hierbei muss genau wie bei dem Galerkinverfahren zum Lösen von Operatorgleichungen nachgewiesen werden, dass für eine bestimmte (zu wählende) Folge endlichdimensionaler Unterräume, die Lösungen des endlichdimensionalen Problems, gegen die Lösung des ursprünglichen Problems konvergieren.

Die schwache Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen legt desweiteren nahe, Operatoreigenwertprobleme für bestimmte partielle Differentialoperatoren in einer variationellen Form zu formulieren. Wir werden daher eine bestimmte, besonders gut erforschte Klasse von variationellen Eigenwertproblemen studieren und die abstrakten Ergebnisse zum Schluss anhand eines konkreten Beispiels anwenden. Als Hauptreferenz sowohl für die Untersuchung, als auch die Formulierung dieser bestimmten Klasse, die wir im zweiten Abschnitt formulieren werden, sei [2] genannt. Eine anwendungsorientierte Einführung in die Ergebnisse enthalten die ersten zwei Teile des Überblicksartikels [3].

Da das Vorgehen in [2] nicht ganz elementar ist, führen wir zuerst die Grundlagen, mit denen in den späteren Abschnitten die Theorie formuliert und bewiesen wird, auf. Als wichtigste Quellen seien hier [1] für die Zusammenhänge zwischen Starker- und Normkonvergenz bei gewissen Klassen kompakter Operatoren, [14] für die Spektraltheorie kompakter Operatoren und weitere funktionalanalytische Grundlagen, sowie [9] für die Störungstheorie von Eigenwertproblemen abgeschlossener Operatoren, genannt.

1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden wir die vor allem funktionalanalytischen Mittel aufführen, die wir für die Untersuchung und Formulierung eines variationellen Eigenwertproblems benötigen. Es sei bemerkt das wir nicht alle Resultate dieses Kapitels beweisen können, da dies den Umfang dieser Arbeit sprengen und uns zu weit von der eigentlichen Thematik entfernen würde.

1.1 Lineare stetige und kompakte Operatoren

Dieser Abschnitt liefert uns die Begrifflichkeiten der Funktionenräume linearer stetiger und kompakter Operatoren und gibt einige äquivalente Definitionen für sie an. Des Weiteren wird eine Norm auf diesen Räumen definiert und ein Kriterium angegeben, wann diese Räume Banachräume sind. Weiter wird die Menge der abgeschlossenen Operatoren eingeführt und der Satz vom abgeschlossenen Graphen angegeben. Die Inhalte stammen im wesentlichen aus [14], sind jedoch in den meisten Einführungen der Funktionalanalysis zu finden.

Definition 1.1.1 (Lineare und kompakte Operatoren)

Seien X, Y normierte Räume, so nennen wir eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$

- i) beschränkt, wenn T beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.
- ii) kompakt, wenn T beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(X, Y)$ den Raum der linearen beschränkten Abbildungen von X nach Y und mit $\mathcal{K}(X, Y)$ den Raum der linearen kompakten Abbildungen von X nach Y . Weiter schreiben wir abkürzend $\mathcal{L}(X)$ für $\mathcal{L}(X, X)$ und $\mathcal{K}(X)$ für $\mathcal{K}(X, X)$. Es ist klar, dass $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ gilt.

Lemma 1.1.2 (Äquivalente Definition von Beschränktheit und Kompaktheit)

Seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ eine linear Abbildung, so gelten:

- i) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) T ist beschränkt
- (b) Es existiert ein $M \geq 0$ mit:

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$$

- (c) T ist stetig
- (d) T ist stetig in 0

ii) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) T ist kompakt
- (b) Jede beschränkte Folge $(x_n)_n$ besitzt eine Teilfolge $(x_{p_n})_n$ sodass $(Tx_{p_n})_n$ eine in Y konvergente Folge ist.

Beweis. Siehe [14, Kapitel II, Abschnitte 1, 3].

Bemerkung 1.1.3

Seien X, Y normierte Räume über dem Körper \mathbb{K} . Dann sind $\mathcal{L}(X, Y)$ und $\mathcal{K}(X, Y)$ ebenfalls Vektorräume über \mathbb{K} bezüglich der Skalarmultiplikation und der Operatoraddition, die für $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ über:

$$(\lambda S)(x) := \lambda S(x) \quad \forall x \in X$$

$$(S + T)(x) := S(x) + T(x) \quad \forall x \in X$$

definiert sind.

Lemma 1.1.4 (Norm auf dem Raum der linearen stetigen Funktionen)

Seien X, Y normierte Räume über dem Körper \mathbb{K} und sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann definiert:

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} &:= \sup_{x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \in B_X(0, 1)} \|Tx\| \\ &= \inf \{ M > 0 \mid \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X \} \end{aligned}$$

eine Norm auf $\mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis. Siehe [14, Kapitel II, Abschnitt 1].

Satz 1.1.5 (Vollständigkeit der Funktionenräume)

Seien X ein normierter Raum und Y ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X, Y)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ ein Banachraum und $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(X, Y)$ und daher ebenfalls ein Banachraum.

Beweis. Siehe ebenfalls [14, Kapitel II, Abschnitte 1, 3].

Mit Blick auf den Abschnitt über die Störungstheorie von Operatoren führen wir nun eine sehr große Klasse von linearen Operatoren ein

Definition 1.1.6 (abgeschlossener Operatoren)

Seien X und Y normierte Räume. So nennen wir eine lineare Abbildung $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \rightarrow Y$ abgeschlossen, wenn sie der Bedingung

$$\left. \begin{array}{l} (x_n)_n \subset \mathcal{D}(S) \text{ mit } x_n \rightarrow x \in X \\ (Tx_n)_n \rightarrow y \in Y \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \mathcal{D}(S) \text{ und } Tx = y$$

genügt. Wir bezeichnen dann die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ als Menge der linearen abgeschlossenen Operatoren von X nach Y .

Es ist recht leicht zu sehen, dass stetige Operatoren auf einem abgeschlossenem Definitionsbereich auch abgeschlossen sind. Interessant hingegen ist, dass für Operatoren auf Banachräumen auch eine Umkehrung gilt, die wir hier abschließend angeben.

Satz 1.1.7 (vom abgeschlossenen Graphen)

Seien X und Y Banachräume, $D \subseteq X$ ein abgeschlossener Untervektorraum und $T : D \subseteq X \rightarrow Y$ linear und abgeschlossen. Dann ist T stetig.

Beweis. Siehe dazu [14, Kapitel IV, Abschnitt 4].

1.2 Dualräume und adjungierte Operatoren

Definition 1.2.1 (Dualraum)

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann definieren wir:

$$X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

als den (topologischen) Dualraum von X .

Definition 1.2.2 (Adjungierter Operator)

Seien X, Y Banachräume $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann definieren wir:

$$T' : Y' \rightarrow X' \quad f \mapsto f \circ T$$

als den zu T adjungierten Operator oder (Banachraum-) Adjungierten von T . Offensichtlich gilt $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$.

Satz 1.2.3 (Satz von Schauder)

Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein stetiger linearer Operator. Dann ist T kompakt genau dann wenn T' kompakt ist.

Beweis. Siehe [14, Kapitel III Abschnitt 4]

Satz 1.2.4 (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz)

Sei $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \quad x \mapsto (\cdot, x)$$

bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d.h.: $\Phi(\lambda x) = \bar{\lambda}\Phi(x)$). Wir nennen Φ die *Rieszsche Abbildung* zu \mathcal{H} .

Beweis. Siehe [14, Kapitel V, Abschnitt 3]

Definition 1.2.5 (Hilbertraum Adjungierte)

Seien $(\mathcal{V}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}})$ und $(\mathcal{W}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}})$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Dann

definieren wir die Abbildung

$$T^* := \Phi^{-1} \circ T' \circ \Psi$$

als den (Hilbertraum-) adjungierten Operator zu T . Wobei wir mit Φ bzw. Ψ die Rieszsche Abbildung zu \mathcal{V} respektive \mathcal{W} bezeichnen. Es gilt dann für beliebige $v \in \mathcal{V}$ und $w \in \mathcal{W}$:

$$(Tv, w)_{\mathcal{W}} = (v, T^*w)_{\mathcal{V}}.$$

1.3 Konvergenz von Operatoren

Wir werden im Folgenden für uns wichtige Zusammenhänge zwischen starker Konvergenz und Normkonvergenz von Operatoren angeben. Hauptresultat dieses Abschnittes ist die Äquivalenz von Starker- und Normkonvergenz für gewisse Folgen von kompakten Operatoren in einem Banachraum. Die Resultate und Beweise dieses Abschnittes stammen in ihren wesentlichen Punkten aus [1]. Wir beginnen unsere Ausführungen in dem wir die starke und die Normkonvergenz einführen:

Definition 1.3.1 (Konvergenz von Operatoren)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $T_n, T \in \mathcal{L}(X, Y)$. So konvergiert

i) T_n stark oder punktweise gegen T wenn

$$\|T_n x - T x\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in X$$

gilt. Wir schreiben dann: $T_n \xrightarrow{\text{stark}} T$.

ii) T_n (in Norm) gegen T wenn

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt. Wir schreiben dann: $T_n \rightarrow T$.

Proposition 1.3.2

Seien X, Y Banachräume und $T_n, T \in \mathcal{L}(X, Y)$. So folgt aus der Konvergenz in Norm, die starke Konvergenz.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig, so gilt:

$$\|T_n x - T x\|_Y = \|(T_n - T)x\|_Y \leq \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Lemma 1.3.3 (Beschränktheit stark konvergenter Folgen)

Seien X, Y Banachräume und $T, (T_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$ mit $T_n \xrightarrow{\text{stark}} T$, so existiert eine Konstante M , sodass gilt:

$$\|T_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Da T_n stark konvergiert, ist die Folge $(T_n x)_n$ konvergent für beliebiges $x \in X$. Das bedeutet insbesondere, dass die Menge $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Das heißt die Menge $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist punktweise beschränkt. Da X ein Banachraum ist, folgt mit dem Satz von Banach Steinhaus [14, Kapitel IV, Abschnitt 2, Satz IV.2.1] die gleichmäßige Beschränktheit der Menge $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und damit die Behauptung. □

Lemma 1.3.4

Seien X, Y Banachräume und $T, (T_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$ mit $T_n \xrightarrow{\text{stark}} T$. Sei weiter $K \subset X$ eine relativ kompakte Menge, dann konvergiert T_n gleichmäßig auf K gegen T .

Beweis. Sei M eine Konstante, sodass $\|T_n\| + \|T\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (Lemma 1.3.3). Da K relativ kompakt ist, existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Menge $\{x_1, \dots, x_{M_\epsilon}\} \subset K$ sodass

$$\min_{k=1, \dots, M_\epsilon} \|x - x_k\| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall x \in K$$

gilt. Da $(T_n - T)x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $i = 1, \dots, M_\epsilon$ existiert ein N_ϵ sodass für $n > N_\epsilon$ gilt:

$$\|(T_n - T)x_i\| < \frac{\epsilon}{2} \quad i = 1, \dots, M_\epsilon.$$

Das bedeutet für $x \in K$ beliebig und $i \in \{1, \dots, M_\epsilon\}$ sodass $\|x - x_i\| < \frac{\epsilon}{2M}$:

$$\begin{aligned} \|(T_n - T)x\| &\leq \|(T_n - T)x_i\| + \|(T_n - T)(x - x_i)\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + M \frac{\epsilon}{2M} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N_\epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. \square

Satz 1.3.5 (Normkonvergenz aus punktwaiser Konvergenz)

Sei X ein Banachraum und seien $T_n, T, S \in \mathcal{L}(X)$ mit $T_n \xrightarrow{\text{stark}} T$ und sei S ein kompakter Operator. Dann gilt:

$$\|(T - T_n)S\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)S\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{x \in B_X(0,1)} \|(T - T_n)Sx\|_X \\ &= \sup_{z \in S(B_X(0,1))} \|(T - T_n)z\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Wobei wir im letzten Schritt das Lemma 1.3.4 und die Kompaktheit von S , bzw. die daraus resultierende relative Kompaktheit von $S(B_X(0,1))$ genutzt haben. \square

1.4 Spektraltheorie kompakter Operatoren

In diesem Abschnitt werden wir die für uns relevanten Ergebnisse der Spektraltheorie kompakter Operatoren aufführen. Für ausführliche und elementare Beweise sei auf [14] verwiesen.

Sei nun X ein komplexer Banachraum und $T : X \rightarrow X$ ein abgeschlossener Operator. Dann definieren wir die Resolventenmenge und das Spektrum von T wie folgt:

Definition 1.4.1 (Spektrum, Resolventenmenge und Resolventenabbildung)

Wir definieren:

i)

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

als die *Resolventenmenge* von T ,

ii)

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

als das *Spektrum* von T ,

iii)

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - T) \text{ ist nicht injektiv}\}$$

als das *Punktspektrum* oder die *Eigenwerte* von T ,

iv)

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid (\lambda - T) \text{ ist injektiv und } \overline{\text{ran}(\lambda - T)} = \mathcal{H}\}$$

als das *stetige Spektrum* von T ,

v)

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - T) \text{ ist injektiv und } \overline{\text{ran}(\lambda - T)} \neq \mathcal{H}\}$$

als das *Restspektrum* und

vi)

$$R : \rho(T) \rightarrow \mathcal{L}(X) \quad \lambda \mapsto R_\lambda(T) := (\lambda - T)^{-1}$$

als die Resolventenabbildung und $R_\lambda(T)$ die *Resolvente* von T in λ .

Bemerkung 1.4.2

Es ist mithilfe des Satzes über die Neumannschen Reihe (siehe dazu [14] Kapitel II Abschnitt 1) möglich zu zeigen, dass die Resolventenmenge offen und das Spektrum, als dessen Komplement abgeschlossen ist.

Auf eine sehr ähnliche Art und Weise kann man ebenfalls zeigen, dass die Resolventenabbildung als Funktion auf $\rho(T)$ analytisch ist und daher stückweise holomorph (im Sinne der Differenzierbarkeit auf Banachräumen). Beides sind Resultate, die wir im späteren noch benötigen werden.

Oftmals sehr nützlich sind folgende Identitäten für die Differenz zweier Resolventen

Korollar 1.4.3 (Resolventenidentitäten)

Es sei X ein komplexer Banachraum und $T, S \in \mathcal{C}(X)$ abgeschlossene Operatoren. Dann gelten für $\lambda, \mu \in \rho(T) \cap \rho(S)$ die Resolventenidentitäten:

- i) Erste Resolventenidentität: $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T)$
- ii) Zweite Resolventenidentität: $R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(T - S)R_\lambda(S)$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. Zu i):

$$\begin{aligned} (\lambda - T)^{-1} - (\mu - T)^{-1} &= (\lambda - T)^{-1}(1 - (\lambda - T)(\mu - T)^{-1}) \\ &= (\lambda - T)^{-1}((\mu - T) - (\lambda - T))(\mu - T)^{-1} \\ &= (\lambda - T)^{-1}(\mu - \lambda)(\mu - T)^{-1} \end{aligned}$$

zu ii):

$$\begin{aligned} (\lambda - T)^{-1} - (\lambda - S)^{-1} &= (\lambda - T)^{-1}(1 - (\lambda - T)(\lambda - S)^{-1}) \\ &= (\lambda - T)^{-1}((\lambda - S) - (\lambda - T))(\lambda - S)^{-1} \\ &= (\lambda - T)^{-1}(T - S)(\lambda - S)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Satz 1.4.4 (von Riesz-Schauder)

Sei $T \in K(X)$ ein kompakter Operator und X ein Banachraum dann gelten:

- i) $\ker(1 - T)$ ist ein endlich dimensionaler Untervektorraum von X ,
- ii) $\text{ran}(1 - T)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von X .

Beweis. Siehe [14, Kapitel VI, Abschnitt 2].

Definition 1.4.5 (Eigenraum und geometrische Vielfachheit)

Für $T \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \in \sigma_p(T)$ definieren wir:

- i) $V^\lambda := \ker(\lambda - T)$ als den zu λ gehörigen Eigenraum,
- ii) $n_\lambda := \dim(V^\lambda)$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ .

Bemerkung 1.4.6

Mit Satz 1.4.4 folgt: Für ein $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ ist der zugehörige Eigenraum

$V^\lambda = \ker(\lambda - T)$ endlichdimensional und damit auch die geometrische Vielfachheit n_λ eine natürliche Zahl.

Der nachfolgende Satz wird das Spektrum kompakter Operatoren genau charakterisieren und garantiert uns, dass jeder nicht verschwindende Eigenwert eines kompakten Operators ein isolierter Punkt des Spektrums ist. Dies ist eine Eigenschaft kompakter Operatoren, von der wir noch sehr häufig Gebrauch machen werden.

Satz 1.4.7 (Spektrum kompakter Operatoren)

Für einen kompakten Operator $T \in \mathcal{K}(X)$ gelten folgende Aussagen:

i) Ist $\dim(X) = \infty$ so gilt:

$$0 \in \sigma(T)$$

ii)

$$\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(T)$$

iii) Entweder ist $\sigma(T)$ endlich oder $\exists (\lambda_n)_n \subset \mathbb{C}$ sodass gilt:

$$\sigma(T) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \quad \text{und} \quad \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

In jedem Fall ist 0 der einzig mögliche Häufungspunkt in $\sigma(T)$.

Beweis. Siehe ebenfalls [14, Kapitel VI, Abschnitt 2].

Als letztes Resultat dieses Abschnittes führen wir nun den Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte bzw. normale Operatoren auf, den wir benötigen werden, wenn wir uns dem Spezialfall der selbstadjungierten Operatoren widmen. Ein stetiger Operator T in einem Hilbertraum \mathcal{H} , d.h. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt normal wenn $TT^* = T^*T$ und selbstadjungiert falls $T^* = T$ gilt. Das Resultat für kompakte Operatoren lautet dann:

Satz 1.4.8 (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren)

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum über dem Körper \mathbb{K} und $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ein kompakter Operator. Sei weiter T normal (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. selbstadjungiert (falls

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Dann existiert ein maximal abzählbares (eventuell endliches) Orthonormalsystem $\{e_1, e_2, \dots\} \subset \mathcal{H}$, sowie eine (eventuell abbrechende) Nullfolge $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, sodass gelten:

- i) $\mathcal{H} = \ker T \oplus \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$,
- ii) $Te_k = \lambda_k e_k \quad \forall k$,
- iii) $Tx = \sum_k \lambda_k(x, e_k) e_k \quad \forall x \in \mathcal{H}$,

wobei iii) für abzählbar unendlich viele Eigenwerte im Sinne von Konvergenz bezüglich der Hilbertraum-Norm zu verstehen ist.

Beweis. Siehe wieder [14, Kapitel VI, Abschnitt 3].

1.5 Störungstheorie linearer, abgeschlossener Operatoren

Im folgenden Abschnitt betrachten wir wichtige Ergebnisse der Störungstheorie linearer abgeschlossener Operatoren nach [9]. Die Störungstheorie beschäftigt sich unter anderem mit der Änderung des Spektrums eines Operators unter (kleinen) Störungen. Kleine Störungen können zum Beispiel die Addition eines Operators $V_\epsilon \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|V_\epsilon\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$ sein.

Wir werden in den nächsten Abschnitten ein Operator-Eigenwertproblem formulieren und untersuchen, inwiefern sich die Lösungen dieses Problems mittels diskreter Approximation nähern lassen. Für einen Operator T und Näherungen T_h mit $\|T - T_h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ stellt sich also die Frage, inwiefern sich die Eigenwerte von T von denen des gestörten Operators $T_h = T + V$ für $V = T_h - T$ unterscheiden.

Wir beginnen unsere Ausführungen mit dem folgenden Satz, der uns das Werkzeug liefern wird, um die algebraische Vielfachheit kompakter Operatoren sinnvoll zu definieren und uns gleichzeitig einen Ausdruck für die Projektionen auf die verallgemeinerten Eigenräume liefert.

Satz 1.5.1 (Zerlegung des Spektrums)

Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{C}(X)$ ein abgeschlossener Operator. Sei weiter $\sigma(T) = \sigma'_T \dot{\cup} \sigma''_T$ eine disjunkte Zerlegung des Spektrums von T . Sei $\Gamma \subset \rho(T)$ eine rektifizierbare geschlossene Kurve derart, dass σ'_T von Γ umschlossen wird und σ''_T außerhalb Γ liegt. Dann existieren T -invariante Un-

terräume $M', M'' \subseteq X$, sodass $X = M' \oplus M''$ gilt und $T|_{M'} \in \mathcal{L}(M')$ ist. Weiter gilt: $\sigma(T|_{M'}) = \sigma'_T$ und $\sigma(T|_{M''}) = \sigma''_T$. Es gilt weiterhin für den Operator

$$P := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - T)^{-1} dz \in \mathcal{L}(X)$$

die Identität: $M' = PX$ und $M'' = (1 - P)X$.

Beweis. Siehe [9, Kapitel III, §6, Abschnitt 4].

Definition 1.5.2

Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{K}(X)$ ein kompakter Operator. Für einen Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ definieren wir:

- i) $E^\lambda := \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker(\lambda - T)^k$ als den zu λ gehörigen verallgemeinerten Eigenraum von T ,
- ii) $m_\lambda := \dim(E^\lambda)$ als die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ ,
- iii) $\alpha_\lambda := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker(\lambda - T)^k = E^\lambda\}$ als die Aufsteigende des Eigenwertes λ ,
- iv) für $v \in E^\lambda$ nennen wir $s_{\lambda,v} := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (\lambda - T)^k v = 0\} \leq \alpha_\lambda$ die Stufe von v . Den Vektor v nennen wir einen verallgemeinerten Eigenvektor der Stufe $s_{\lambda,v}$ zum Eigenwert λ .

Wir benötigen den Satz 1.5.1 in seiner allgemeinen Form nicht, sondern zeigen mit ihm den Spezialfall für kompakte Operatoren.

Korollar 1.5.3 (Verallgemeinerter Eigenraum kompakter Operatoren)

Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$ ein kompakter Operator und $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von T . Dann ist der verallgemeinerte Eigenraum E^λ aus Definition 1.5.2 endlichdimensional. Weiter existiert ein Kreisring Γ mit Mittelpunkt λ derart, dass alle Punkte außer λ außerhalb des Spektrums liegen. Dann ist durch

$$E(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - T)^{-1} dz$$

die Projektion auf den verallgemeinerten Eigenraum E^λ definiert. Und es

gilt: $X = E^\lambda \oplus (1 - E(\lambda))X$.

Beweis. Es ist nach Satz 1.4.7 λ kein Häufungspunkt von $\sigma(T)$. Daher existiert ein geschlossener Kreisring Γ derart, dass λ von Γ umschlossen wird und $\sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ außerhalb von Γ liegt. Dann sind nach Satz 1.5.1 $M_\lambda := E(\lambda)X$ und $M := (1 - E(\lambda))X$ T -invariante Unterräume von X . Wir zeigen nun: Da T kompakt ist, ist M_λ endlichdimensional.

Es ist $T|_{M_\lambda} \in \mathcal{K}(M_\lambda)$ und $\sigma(T|_{M_\lambda}) = \{\lambda\}$. Aus $\dim(M_\lambda) = \infty$ würde mit Satz 1.4.7 folgen, dass $0 \in \sigma(T|_{M_\lambda}) = \{\lambda\}$ ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Wahl von λ : $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$.

Wir zeigen: $E^\lambda \subseteq M_\lambda$. Sei dazu $v \in E^\lambda$. Da $X = M_\lambda \oplus M$ existieren eindeutige $v_\lambda \in M_\lambda$, $v_0 \in M$ mit $v = v_\lambda + v_0$. Da $v \in E^\lambda$ ist, existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda - T)^\alpha v \\ &= (\lambda - T)^\alpha v_\lambda + (\lambda - T)^\alpha v_0. \end{aligned}$$

Dies gilt wegen der T -Invarianz von M_λ und M genau dann, wenn $(\lambda - T)^\alpha v_\lambda = 0$ und $(\lambda - T)^\alpha v_0 = 0$ gelten. Angenommen nun $v_0 \neq 0$, dann existiert ein $k \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ mit:

$$(\lambda - T)^k v_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad (\lambda - T)^{k+1} v_0 = 0.$$

Da M T -invariant ist und $v_0 \in M$, ist $(\lambda - T)^k v_0 \in M$ und

$$(\lambda - T)(\lambda - T)^k v_0 = (\lambda - T|_M)(\lambda - T|_M)^k v_0 = 0.$$

Das heißt aber $\lambda \in \sigma(T|_M)$ im Widerspruch zu Satz 1.5.1 der besagt, dass $\sigma(T|_M) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$. Daher folgt $v_0 = 0$ und $v = v_\lambda \in M_\lambda$.

Nun zeigen wir $M_\lambda \subseteq E^\lambda$. Wie wir eben gezeigt haben ist $\dim(M_\lambda) =: d < \infty$ und der einzige Eigenwert von $T|_{M_\lambda}$ ist λ . Das heißt, das charakteristische Polynom von T ist gegeben durch

$$\chi_{T|_{M_\lambda}}(z) = (z - \lambda)^d.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton [6, Kapitel 4, Abschnitt 5] ist damit $(T|_{M_\lambda} - \lambda)^d = 0$. D.h. für $v \in M_\lambda$ folgt

$$(\lambda - T)^d v = (\lambda - T|_{M_\lambda})^d v = 0$$

und damit $v \in E^\lambda$.

Damit haben wir gezeigt: $E^\lambda = M_\lambda$. D.h. $E(\lambda)$ ist die Projektion auf den verallgemeinerten Eigenraum und die algebraische Vielfachheit m_λ ist für nicht Null-Eigenwerte kompakter Operatoren endlich. \square

Bemerkung 1.5.4

Seien $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ und

$$E(\lambda^1, \dots, \lambda^n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - T)^{-1} dz,$$

mit einer Kurve $\Gamma \subset \rho(T)$ welche die Punkte $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ aus dem Spektrum umschließt und das restliche Spektrum außerhalb lässt. Ähnlich zu dem Beweis von Korollar 1.5.3 kann man folgern, dass $E(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ eine Projektion auf die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume der Eigenwerte ist.

Bemerkung 1.5.5 (Wohldefiniertheit der Aufsteigenden)

Nach Korollar 1.5.3 ist die Aufsteigende für nicht Null-Eigenwerte kompakter Operatoren endlich und immer kleiner oder gleich der Dimension des verallgemeinerten Eigenraumes.

Zu einem späteren Zeitpunkt wollen wir im Rahmen von Eigenvektorapproximationen die Konvergenz von (verallgemeinerten) Eigenräumen untersuchen. Dazu ist der Begriff des Abstandes zwischen abgeschlossenen Unterräumen nötig. Es trifft sich, dass man mithilfe dieses Abstandes einen Abstandsbegriff für abgeschlossene (also insbesondere auch nicht stetige) Operatoren definieren kann, der für die Störungstheorie unerlässlich ist und der auch in den hier aufgeführten Ergebnissen aus [9], die wir für die Untersuchung unseres Problems benötigen, häufig vorkommt.

Definition 1.5.6 (Abstand zwischen abgeschlossenen Unterräumen und Operatoren)

Sei X ein Banachraum und $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subset X$ abgeschlossene Unterräume von X . So definieren wir:

$$\delta(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \sup_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \text{dist}(x, \mathcal{W})$$

und

$$\hat{\delta}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \max \{ \delta(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \delta(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \}.$$

Wir nennen $\hat{\delta}$ den Abstand (engl. gap) zwischen \mathcal{V} und \mathcal{W} .

Seien X, Y Banachräume und $T, S \in \mathcal{C}(X, Y)$ abgeschlossene Operatoren und seien $\mathcal{G}(T), \mathcal{G}(S) \subseteq X \times Y$ die Graphen von T und S ¹. Dann

¹Der Graph eines Operators ist über $\mathcal{G}(T) := \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$ definiert.

sind $\mathcal{G}(T), \mathcal{G}(S)$ abgeschlossene Unterräume des Banachraumes $X \times Y$. Wir definieren dann:

$$\hat{\delta}(T, S) := \hat{\delta}(\mathcal{G}(T), \mathcal{G}(S)).$$

Wir sagen $(T_n)_n \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ konvergiert im verallgemeinerten Sinne gegen T , wenn $\hat{\delta}(T, T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt.

Häufig nützlich ist folgendes Resultat:

Satz 1.5.7

Sei X ein Banachraum und seien $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subset X$ mit $\dim(\mathcal{V}) < \infty$ und $\dim(\mathcal{W}) < \infty$. So gilt:

$$\delta(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \leq \frac{\delta(\mathcal{V}, \mathcal{W})}{1 - \delta(\mathcal{V}, \mathcal{W})}$$

Beweis. Vergleiche [8, §2, Abschnitt 1].

Proposition 1.5.8 (Normkonvergenz und Konvergenz im verallg. Sinne)

Seien X, Y Banachräume und $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$. So gilt

$$\hat{\delta}(T, S) \leq \|T - S\|_{\mathcal{L}(X, Y)}.$$

Beweis. Der Beweis folgt mittels der Abschätzung

$$\begin{aligned} \delta(T, S) &:= \sup_{\substack{(x, Tx) \in \mathcal{G}(T) \\ \|x\|_X + \|Tx\|_Y = 1}} \inf_{(z, Sz) \in \mathcal{G}(S)} (\|x - z\|_X + \|Tx - Sz\|_Y) \\ &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X + \|Tx\|_Y = 1}} \inf_{z \in X} (\|x - z\|_X + \|Tx - Sz\|_Y) \\ &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X + \|Tx\|_Y = 1}} (\|x - x\|_X + \|Tx - Sx\|_Y) \\ &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X + \|Tx\|_Y = 1}} \|T - S\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|x\|_X \\ &\leq \|T - S\|_{\mathcal{L}(X, Y)}. \end{aligned}$$

Offensichtlich liefert die gleiche Abschätzung $\delta(S, T) \leq \|T - S\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$, womit die Aussage folgt. \square

Diese Proposition liefert außerdem für Banachräume X, Y und Operatoren $T, (T_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|T - T_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, dass $(T_n)_n$ im verallgemeinerten Sinne gegen T konvergiert. Das ist wichtig, um die folgenden Resultate, die in [9] für Folgen im verallgemeinerten Sinne gezeigt werden, auch auf den beschränkten Fall und die Normkonvergenz anwenden zu können.

Die Aussage, dass für stetige Operatoren die Konvergenz in Norm die Konvergenz im verallgemeinerten Sinne impliziert, lässt sich sogar noch umkehren. Dies und weitere Zusammenhänge liefert der

Satz 1.5.9

Seien X und Y Banachräume und $T, T_n \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$, so gelten:

i)

$$\hat{\delta}(T_n, T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

ii) Wenn $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ existiert, so gilt $T_n \rightarrow T$ im verallgemeinerten Sinne genau dann wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $T_n^{-1} \subseteq \mathcal{L}(Y, X)$ für alle $n > N$ existieren und

$$\|T_n^{-1} - T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt.

iii) Seien nun $T, T_n \subseteq \mathcal{L}(X)$ und $w \in \rho(T)$, so existiert ein N so dass $w \in \rho(T_n)$ für alle $n \geq N$ und es gilt:

$$\|R_w(T) - R_w(T_n)\| = \|(w - T)^{-1} - (w - T_n)^{-1}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis. Siehe [9, Kapitel IV, §2, Abschnitt 6].

Im Hinblick auf Korollar 1.5.3 und die dort definierte Projektion interessieren die Ergebnisse des folgenden Satzes.

Satz 1.5.10

Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{C}(X)$ sowie $\Gamma \subseteq \rho(T)$ eine kompakte Teilmenge

der Resolventenmenge. So existiert ein $\delta > 0$, sodass für $S \in \mathcal{C}(X)$ mit $\hat{\delta}(T, S) < \delta$ gilt:

$$\Gamma \subset \rho(S).$$

Beweis. Siehe [9, Kapitel IV, §3, Abschnitt 1].

Eine Verschärfung der obigen Aussage und das für uns wichtigste Ergebnis dieses Abschnittes ist der folgende Satz, der aufführt wie die Konvergenz im verallgemeinerten Sinne (und damit auch die klassische Normkonvergenz von Operatoren) eine Konvergenz von gewissen Teilen des Spektrums nach sich zieht. Seine volle Stärke entfaltet er für kompakte Operatoren, deren Spektrum, wie wir nach Satz 1.4.7 wissen, keinen Häufungspunkt außerhalb der Null besitzt und für die die Projektion auf den verallgemeinerten Eigenraum eines nicht verschwindenden Eigenwertes wie in Korollar 1.5.3 definiert werden kann.

Satz 1.5.11

Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{C}(X)$ ein abgeschlossener Operator. Sei weiter $\sigma(T) = \sigma'_T \dot{\cup} \sigma''_T$ eine disjunkte Zerlegung des Spektrums von T . Sei $\Gamma \subset \rho(T)$ eine rektifizierbare geschlossene Kurve derart, dass σ'_T von Γ umschlossen wird und σ''_T außerhalb Γ liegt und seien weiter M'_T, M''_T zu der Zerlegung des Spektrums gehörige Zerlegung von X in T -invariante Unterräume (definiert wie in Satz 1.5.1).

Dann existiert ein nur von T und Γ abhängiges $\delta > 0$, sodass für $S \in \mathcal{C}(X)$ mit $\hat{\delta}(S, T) < \delta$ folgt:

$\Gamma \subset \rho(S)$ und das Spektrum von S besitzt eine disjunkte Zerlegung $\sigma(S) = \sigma'_S \dot{\cup} \sigma''_S$ derart, dass σ'_S von Γ umschlossen wird und σ''_S außerhalb von Γ liegt. Weiter gilt σ'_S respektive σ''_S sind nicht leer, wenn σ'_T respektive σ''_T nicht leer ist und für M'_S, M''_S , die zu der Zerlegung des Spektrums gehörige Zerlegung von X in S -invariante Unterräume gilt: M'_T ist isomorph zu M'_S und M''_T ist isomorph zu M''_S .

Für die in Satz 1.5.1 erklärten Projektionen P_T, P_S auf M'_T bzw. M'_S gilt:

$$\|P_T - P_S\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{\hat{\delta}(S,T) \rightarrow 0} 0$$

Beweis. Siehe dazu [9, Kapitel IV, §3, Abschnitt 4].

2 Kompakte variationelle Eigenwertprobleme

2.1 Problemstellung und ein erstes Beispiel

Wir formulieren im folgenden ein kompaktes variationell gestelltes Eigenwertproblem in Hilberträumen. Seien also \mathcal{V} und \mathcal{W} Hilberträume über \mathbb{C} und seien

$$\begin{aligned}a &: \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C} \\ b &: \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

Sesquilinearformen.

Sei weiter a stetig, das heißt es existiert ein $C > 0$, sodass gilt:

$$|a(v, w)| \leq C \|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{W}}$$

und sei b stetig bzgl. einer kompakten Norm, d.h. es existiert eine Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ in \mathcal{V} , sodass jede in $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ beschränkte Folge eine Teilfolge besitzt, die eine Cauchyfolge in $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{K}})$ ist und es gilt:

$$|b(u, v)| \leq C \|v\|_{\mathcal{K}} \|u\|_{\mathcal{W}}.$$

Wir betrachten das folgende variationelle Eigenwertproblem:

Finde ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein $u \in \mathcal{V}$ mit $u \neq 0$, sodass gilt:

$$a(u, w) = \lambda b(u, w) \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (2.1)$$

Das so eben formulierte Eigenwertproblem ist in seiner obigen Form recht abstrakt gehalten. Um dem Leser diese Formulierung zu motivieren und einen Eindruck zu geben, wie man bei dem Nachweis der obigen Eigenschaften bei einem variationell formulierten Eigenwertproblem eines Differentialoperators vorgehen kann, geben wir als Beispiel das Eigenwertproblem des Laplace Operators.

Beispiel 2.1.1 (Das Laplace Eigenwertproblem)

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes, glattberandetes Gebiet. Wir betrachten das Problem:

Finde ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $u \neq 0$ sodass gilt:

$$\begin{aligned}-\Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Über Multiplikation mit einer Testfunktion, Integration über das Gebiet Ω und partielle Integration gelangen wir zur variationellen Formulierung² des Eigenwertproblems:

Finde ein $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \lambda \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) \, dx \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$$

Hierbei ist $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ der Raum der schwach differenzierbaren, quadratintegrierbaren Funktionen, deren schwache Ableitung wieder quadratintegrierbar ist mit verschwindender Spur, versehen mit dem Skalarprodukt, das ihn zum Hilbertraum macht

$$(v, w)_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) \, dx.$$

In unserer oben verwendeten Schreibweise heißt das: $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{K}} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ sowie

$$\begin{aligned} a : \mathcal{V} \times \mathcal{W} &\rightarrow \mathbb{R} & (v, w) &\mapsto \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) \, dx \\ b : \mathcal{V} \times \mathcal{W} &\rightarrow \mathbb{R} & (v, w) &\mapsto \int_{\Omega} v(x) \cdot w(x) \, dx. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Bilinearformen a und b ist klar. Wir zeigen nun dass b stetig bezüglich einer kompakten Norm ist. Nach dem Satz von Rellich [5, Kapitel 5, Abschnitt 7] ist $\mathcal{H}^1(\Omega)$ ³ kompakt eingebettet in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ⁴. Damit folgt sofort, wegen der Äquivalenz von $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ auf $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ und der Tatsache, dass $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$ ist, dass $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \subset\subset \mathcal{L}^2(\Omega)$. Nun gilt mit der Hölderungleichung [5, Anhang B, Abschnitt 2] und der Poincaré-Ungleichung [5, Kapitel 5, Abschnitt 8.1]:

$$b(v, w) \leq \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq C \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}$$

wobei C die Konstante aus der Poincaré-Ungleichung ist. Es folgt, da mit obiger Argumentation $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \subset\subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ gilt, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ eine kompakte Norm ist und somit, dass b stetig bezüglich einer kompakten Norm ist.

²Für eine ausführliche Einführung von schwachen Ableitungen und Sobolevräumen verweise ich auf [5] Kapitel 5.

³Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^2(\Omega)$, den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen und mit $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (bzw. $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$) die Räume der s -mal schwach differenzierbaren, quadratintegrierbaren Funktionen, deren s -te Ableitung wieder quadratintegrierbar ist (und deren Spur verschwindet).

⁴Für zwei Banachräume X und Y mit $X \subset Y$ sagen wir X ist kompakt eingebettet in Y und schreiben $X \subset\subset Y$, wenn eine lineare, injektive und kompakte Abbildung $j : X \rightarrow Y$ existiert.

2.2 Formulierung des variationellen Eigenwertproblems als Operator Eigenwertproblem

Im folgenden Abschnitt, den Darstellungen von [3] folgend, wollen wir einen kompakten Operator $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ definieren, dessen Eigenwertproblem äquivalent zu dem Problem (2.1) ist, um dieses mit Hilfe der weitreichenden Spektral- und Konvergenz-Theorie über kompakte Operatoren untersuchen zu können. Wir betrachten daher zur stetigen Sesquilinearform a das lineare variationelle Problem:

Sei $f \in \mathcal{W}'$ ein Element im Dualraum von \mathcal{W} . Finde ein $v_f \in \mathcal{V}$, sodass gilt:

$$a(v_f, w) = \langle f, w \rangle_{\mathcal{W}', \mathcal{W}} \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (2.2)$$

Wir geben ein wichtiges Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu diesem variationellen Problem an:

Satz 2.2.1 (inf-sup-Bedingungen)

Sei $a : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Sesquilinearform. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) Für alle $f \in \mathcal{W}'$ besitzt das lineare variationelle Problem (2.2) genau eine Lösung u_f , die folgender Abschätzung genügt:

$$\|u_f\| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{\mathcal{W}'},$$

wobei γ eine von f unabhängige Konstante ist.

- ii) Die Sesquilinearform a genügt den *inf-sup-Bedingungen*:

$$\exists \gamma > 0 : \inf_{v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} \sup_{w \in \mathcal{W} \setminus \{0\}} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{W}}} \geq \gamma \quad (2.3a)$$

$$\forall w \in \mathcal{W} \setminus \{0\} : \sup_{v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} |a(v, w)| > 0 \quad (2.3b)$$

Beweis. Siehe dazu [11, Kapitel 2, Abschnitt 1.5].

Erfülle nun a die *inf-sup-Bedingungen*, so definieren wir die Abbildung

$$A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

derart, dass $a(v, w) = (Av, w)_{\mathcal{W}}$ für alle $v \in \mathcal{V}$ und $w \in \mathcal{W}$ gilt. Da a die inf-sup-Bedingungen erfüllt, ist A wohldefiniert und bijektiv (wie wir gleich

zeigen werden). Weiter definieren wir die Abbildungen:

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \\ T_* &: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W} \end{aligned}$$

sodass gilt:

$$a(Tf, w) = b(f, w) \quad \forall f \in \mathcal{V}, \quad \forall w \in \mathcal{W} \quad (2.4a)$$

$$a(v, T_*g) = b(v, g) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad \forall g \in \mathcal{W}. \quad (2.4b)$$

Die Abbildungen T, T_* sind wohldefiniert. In der Tat: Sei $f \in \mathcal{V}$. Da b stetig ist, folgt $b(f, \cdot) \in \mathcal{W}'$ und das lineare variationelle Problem:

Finde ein $v_f \in \mathcal{V}$, sodass $\forall w \in \mathcal{W}$ gilt

$$a(v_f, w) = b(f, w)$$

besitzt genau eine Lösung (wegen Satz 2.2.1). Es ist nun aber v_f genau das Bild von f unter T . Die Wohldefiniertheit von T_* folgt analog.

Lemma 2.2.2

Die wie oben definierten Abbildungen T, T_* sind lineare, kompakte Operatoren auf den Hilberträumen \mathcal{V}, \mathcal{W} . Weiter ist A ein bijektiver, stetiger und linearer Operator und es gilt:

$$T^* = A^* \circ T_* \circ A^{*-1}$$

Beweis. Die Linearität von T, T_* folgt leicht aus der Linearität des linearen variationellen Problems und der Definition von T als Lösungsoperator.

Die Kompaktheit von T folgt direkt aus der Kompaktheit von b . Sei $(v_n)_n \subset \mathcal{V}$ eine beschränkte Folge, so existiert nach Voraussetzung eine Teilfolge $(v_{p_n})_n$ sodass v_{p_n} eine $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ Cauchyfolge ist. Weiter gilt mit Satz 2.2.1:

$$\begin{aligned} \|Tv_n\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{1}{\gamma} \|b(v_n, \cdot)\|_{\mathcal{W}'} \\ &= \frac{1}{\gamma} \sup_{\|w\|_{\mathcal{W}}=1} |b(v_n, w)| \\ &\leq \frac{1}{\gamma} C \|v_n\|_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

2.2 Formulierung als Operator Eigenwertproblem

Damit folgt für $\epsilon > 0$ bel. und N_ϵ sodass $\|v_{p_m} - v_{p_n}\|_{\mathcal{K}} < \frac{\epsilon\gamma}{C}$ für alle $m, n > N_\epsilon$:

$$\begin{aligned} \|Tv_{p_m} - Tv_{p_n}\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{C}{\gamma} \|v_{p_m} - v_{p_n}\|_{\mathcal{K}} \\ &\leq \frac{C}{\gamma} \frac{\epsilon\gamma}{C} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Das heißt $(Tv_{p_n})_n$ ist eine Cauchyfolge in $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ und da der Raum vollständig ist folgt, dass die Folge konvergiert. Das aber heißt T bildet beschränkte Mengen auf relativkompakte Mengen ab und ist damit ein kompakter Operator. Um die Kompaktheit von T_* zu zeigen genügt es $T^* = A^* \circ T_* \circ A^{*-1}$ und die Stetigkeit sowie Invertierbarkeit von A zu zeigen.

Wir zeigen nun, dass A ein linearer, bijektiver und stetiger Operator ist. Die Linearität ist klar, sie folgt sofort aus der Linearität von a im ersten Eingang.

- *Stetigkeit.* Sei nun $v \in \mathcal{V}$ und o.B.d.A $Av \neq 0$ so gilt:

$$\begin{aligned} \|Av\|_{\mathcal{W}}^2 &= (Av, Av)_{\mathcal{W}} \\ &= a(v, Av) \\ &\leq C\|v\|_{\mathcal{V}}\|Av\|_{\mathcal{W}} \end{aligned}$$

und das heißt (da $Av \neq 0$ vorausgesetzt wurde)

$$\|Av\|_{\mathcal{W}} \leq C\|v\|_{\mathcal{V}}$$

und damit, dass A stetig ist.

- *Bijektivität.* Die Bijektivität folgt aus Satz 2.2.1:

Sei $w \in \mathcal{W}$ so existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz genau ein $w' \in \mathcal{W}'$, sodass gilt:

$$w'(\cdot) = (w, \cdot)_{\mathcal{W}}$$

Da a die inf-sup-Bedingungen erfüllt, besitzt das lineare variationlle Problem (vgl. (2.2)):

Finde ein $v_w \in \mathcal{V}$, sodass gilt:

$$a(v_w, u) = \langle w', u \rangle_{\mathcal{W}', \mathcal{W}} = (w, u)_{\mathcal{W}} \quad \forall u \in \mathcal{W}$$

genau eine Lösung. Es ist w aber gerade das Bild von v_w unter A . Damit folgen Injektivität und Surjektivität.

2.2 Formulierung als Operator Eigenwertproblem

Da A stetig und bijektiv ist folgt, A ist invertierbar und daher ist A^{-1} wohldefinierter stetiger Operator und somit auch A^*, A^{*-1} . Es bleibt zu zeigen:

$$T^* = A^* \circ T_* \circ A^{*-1}.$$

Hierbei ist A^* der Hilbertraum Adjungierte von A , d.h. $A^* : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ mit

$$(A^*w, v)_{\mathcal{V}} = (w, Av)_{\mathcal{W}}.$$

Daher gilt für alle $v, u \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} (v, A^*T_*A^{*-1}u)_{\mathcal{V}} &= (Av, T_*A^{*-1}u)_{\mathcal{W}} \\ &= a(v, T_*A^{*-1}u) \\ &= b(v, A^{*-1}u) \\ &= a(Tv, A^{*-1}u) \\ &= (ATv, A^{*-1}u)_{\mathcal{W}} \\ &= (A^{-1}ATv, u)_{\mathcal{V}} \\ &= (Tv, u)_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

und daher $T^* = A^* \circ T_* \circ A^{*-1}$.

Nun ist T wie wir oben gesehen haben ein kompakter Operator. Damit ist nach dem Satz von Schauder (Satz 1.2.3) auch T^* ein kompakter Operator. Nun haben wir gesehen, dass $T_* = A^{*-1} \circ T^* \circ A^*$ und A^* ist ein stetiger, invertierbarer Operator. Das heißt T_* ist ähnlich zu einem kompakten Operator und daher selbst kompakt. \square

Nun stehen uns die Mittel zur Verfügung um ein dem variationellen Eigenwertproblem (2.1) äquivalentes Operator Eigenwertproblem zu formulieren. Betrachte das Eigenwertproblem:

Finde ein $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ und ein $\mu \in \mathbb{C}$, sodass für den wie oben definierten, kompakten Operator T gilt:

$$Tv = \mu v \tag{2.5}$$

dann gilt für $\mu \neq 0$:

$$\mu a(v, w) = a(Tv, w) = b(v, w) \quad \forall w \in \mathcal{W}$$

bzw.

$$a(v, w) = \frac{1}{\mu} b(v, w) \quad \forall w \in \mathcal{W}$$

d.h. ist $\mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ ein Eigenwert und $v \in \mathcal{V}$ ein Eigenvektor von T , dann sind v und $\lambda := \frac{1}{\mu}$ Lösung von (2.1).

Es ist ebenso leicht einzusehen, dass für λ Eigenwert des variationellen Problems, $\mu = \frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert des Operators T zum selben Eigenvektor ist. Wie wir bereits gesehen haben (Satz 1.4.7) besitzt ein kompakter Operator entweder endlich oder abzählbar unendlich viele verschiedene Eigenwerte, wobei im unendlichen Falle die Eigenwerte eine Nullfolge bilden. Daraus folgt sofort, dass auch das variationelle Eigenwertproblem entweder endlich viele oder abzählbar unendlich viele Eigenwerte besitzt und das im unendlichen Falle die Folge der Eigenwerte unbeschränkt ist.

Die Begriffe der verallgemeinerten Eigenvektoren und Eigenräume, sowie der Begriff der algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheit eines Eigenwertes und dessen Aufsteigende (vergleiche hierzu Definition 1.4.5 und Definition 1.5.2) lassen sich daher leicht auch auf das Problem (2.1) anwenden, indem wir sie über den Operator T definieren. Wenn wir also fortan von der algebraischen Vielfachheit eines Eigenwertes eines kompakten variationellen Eigenwertproblems sprechen, meinen wir dies im Sinne der algebraischen Vielfachheit von T .

3 Galerkin-Approximation des kompakten Eigenwertproblems

In diesem Kapitel wird es, den Ausführungen von [2], [3] und [15] folgend, um die Galerkin-Approximation der Eigenwerte und Eigenvektoren des in Kapitel 2 beschriebenen variationellen und in Abschnitt 2.2 eingeführten äquivalenten Problems gehen.

Mithilfe der Galerkin-Approximation des kompakten Lösungsoperators werden wir eine Familie von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild definieren, die in Operatornorm gegen den kompakten Lösungsoperator konvergiert. Dies wird uns Motivation sein, um uns im darauf folgenden Abschnitt der Babuška-Osbourn Theorie zu widmen, die uns dann eine umfassende Theorie über die Konvergenz und Konvergenzordnung der Eigenwerte bzw. Eigenräume liefern wird.

Seien also weiterhin \mathcal{V} und \mathcal{W} Hilberträume, a und b stetige Sesquilinearformen, die den inf-sup-Bedingungen genügen, wobei b zusätzlich noch bezüglich einer kompakten Norm in \mathcal{V} stetig sei.

3.1 Galerkin Approximation

Um nun eine Galerkindiskretisierung der Eigenwerte und Eigenvektoren von T bzw. (2.1) zu erklären, benötigen wir eine Familie endlichdimensionaler Unterräume $V_h \subset \mathcal{V}$ und $W_h \subset \mathcal{W}$ mit einem positiven reellen Parameter h .

In dem hier besprochenen Fall werden die Räume V_h und W_h stets gleiche Dimension besitzen.

Wir fordern weiterhin, dass die endlichdimensionalen Räume V_h, W_h den diskreten Inf-Sup-Bedingungen genügen, d.h. es existiert eine Familie $\gamma_h > 0$, sodass für alle h gilt:

$$\inf_{v \in V_h \setminus \{0\}} \sup_{w \in W_h \setminus \{0\}} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{W}}} \geq \gamma_h > 0 \quad (3.1a)$$

$$\sup_{v \in V_h} |a(v, w)| > 0 \quad \forall w \in W_h \setminus \{0\}. \quad (3.1b)$$

Desweiteren stellen wir eine Konvergenz-Bedingung an den Unterraum V_h , die als ‘punktweise Konvergenz’ verstanden werden kann:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma_h^{-1} \inf_{u_h \in V_h} \|u - u_h\|_{\mathcal{V}} = 0 \quad \forall u \in U. \quad (3.2)$$

Diese Bedingung versichert uns, dass die Folge V_h den Raum \mathcal{V} in einer zufriedenstellenden Weise ausschöpft.

Bemerkung 3.1.1

Die Forderung (3.1b) folgt, wenn die Dimensionen der Räume V_h und W_h übereinstimmen aus der Forderung (3.1a). Es ist hierbei wesentlich, dass die Räume V_h und W_h endliche Dimension besitzen.

Nun definieren wir eine Familie von diskreten variationellen Eigenwertproblemen: Finde ein $u_h \in V_h \setminus \{0\}$ und ein $\lambda_h \in \mathbb{C}$, sodass gilt:

$$a(u_h, w_h) = \lambda_h b(u_h, w_h) \quad \forall w_h \in W_h. \quad (3.3)$$

Seien nun $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$ eine Basis von V_h und sei $\psi_1, \dots, \psi_{N_h}$ eine Basis von W_h . Dann gilt für $u_h := \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i$:

Das Paar (Eigenpaar) (u_h, λ_h) löst (3.3) genau dann wenn

$$\mathbf{A}\alpha = \lambda_h \mathbf{B}\alpha \quad (3.4)$$

gilt, mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N_h})^T$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{ij}$ mit $a_{ij} = a(\varphi_j, \psi_i)$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{ij}$ mit $b_{ij} = b(\varphi_j, \psi_i)$. Das Problem (3.3) ist also äquivalent zu einem verallgemeinerten Matrixeigenwertproblem.

Wir definieren nun die Familie von Operatoren $T_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$ über

$$a(T_h v, w) = b(v, w) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad \forall w \in W_h. \quad (3.5)$$

Lemma 3.1.2 (Wohldefiniertheit der T_h)

Die durch (3.5) definierten Operatoren T_h sind wohldefinierte, lineare Operatoren.

Beweis. Wie auch im unendlichdimensionalen Fall folgt die Wohldefiniertheit aus den Inf-Sup-Bedingungen, in diesem Fall den diskreten: Sei $u \in \mathcal{V}$ beliebig, so ist das variationelle Problem:

Finde ein $u_h \in V_h$ mit:

$$a(u_h, w_h) = b(u, w_h) \quad \forall w_h \in W_h$$

für $u_h := \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i$ äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\alpha = \beta_{\mathbf{u}}$$

mit \mathbf{A} , α wie oben und $\beta_{\mathbf{u}} = (\beta_{u,i})_i$ mit $\beta_{u,i} = b(u, \psi_i)$.

Das heißt, nach Ergebnissen der Linearen Algebra, ist T_h wohldefiniert, genau dann wenn $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A}x = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ gilt. Sei nun also $x \in \mathbb{C}^{N_h}$ mit $\mathbf{A}x = 0$. Dann folgt:

$$\sum_{j=1}^{N_h} x_j a(\varphi_j, \psi_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N_h.$$

Da a linear im ersten Argument ist folgt:

$$a\left(\sum_{j=1}^{N_h} x_j \varphi_j, \psi_i\right) = 0 \quad i = 1, \dots, N_h.$$

Das heißt aber für $u_0 = \sum_{j=1}^{N_h} x_j \varphi_j \in V_h$:

$$a(u_0, w) = 0 \quad \forall w \in W_h$$

und mit (3.1a) folgt $u_0 = 0$. Da $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$ linear unabhängig sind, folgt $x_j = 0$ für $j = 1, \dots, N_h$. Das aber heißt nach obiger Argumentation: T_h ist wohldefiniert. Die Linearität von T_h ist wegen der Linearität von a und b im ersten Argument klar. \square

Wir stellen analog zu den Ausführungen um die Gleichung (2.5) fest, dass das diskrete variationelle Eigenwertproblem (3.3) äquivalent zu dem diskreten Operator-Eigenwertproblem ist:

Finde ein $\mu_h \in \mathbb{C}$ und ein $v \in V_h \setminus \{0\}$, sodass gilt:

$$T_h v = \mu_h v.$$

Dann ist wie im kontinuierlichen Falle v ein Eigenvektor zu (3.3) zum Eigenwert $\lambda_h := \frac{1}{\mu_h}$ (für $\mu_h \neq 0$).

Wir definieren nun die zu der Sesquilinearform a gehörige elliptische Projektion $P_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$ sodass P_h der Gleichung:

$$a(u, w) = a(P_h u, w) \quad \forall w \in W_h \quad (3.6)$$

genügt. Die Wohldefiniertheit von P_h liefert das folgende

Lemma 3.1.3 (Wohldefiniertheit der Projektion P_h)

Sei P_h definiert wie oben. So ist P_h eine wohldefinierte lineare Projektion auf den Raum V_h , das heißt

$$P_h^2 = P_h.$$

Weiter gilt

$$T_h = P_h T.$$

Beweis. Wohldefiniertheit. Sei \mathbf{A} wie oben definiert und sei $\mathbf{a}_u := (a_{u,i})_i$ mit $a_{u,i} = a(u, \psi_i)$ so gilt für $u_h := \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \varphi_j$:

$$\begin{aligned} & a(u_h, w) = a(u, w) && \forall w \in W_h \\ \Leftrightarrow & a(u_h, \psi_i) = a(u, \psi_i) && i = 1, \dots, N_h \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j a(\varphi_j, \psi_i) = a_{u,i} && i = 1, \dots, N_h \end{aligned}$$

Und das gilt genau dann, wenn $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{a}_u$ gilt. Da a , V_h und W_h die diskreten inf-sup-Bedingungen (3.1) erfüllen, gilt nach Argumentation wie in Lemma 3.1.2 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Damit existiert eine eindeutige Lösung zum linearen Gleichungssystem $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{a}_u$ und damit ist nach obiger Argumentation P_h durch (3.6) wohldefiniert. Die Linearität von P_h folgt wieder leicht über die Linearität von a im ersten Argument.

Idempotenz. Sei $u_h \in V_h$, so folgt mit

$$a(P_h u_h, w) = a(u_h, w) \quad \forall w \in W_h$$

3.2 Konvergenz des diskreten Problems gegen das kontinuierliche Problem

und der Linearität von a im ersten Argument:

$$a(P_h u_h - u_h, w) = 0 \quad \forall w \in W_h.$$

Mit (3.1a) folgt sofort $P_h u_h - u_h = 0$. Das heißt, für $u_h \in V$ gilt $P_h u_h = u_h$. Da mit Definition von P_h gilt:

$$P_h u \in V_h \quad \forall u \in \mathcal{V}$$

folgt

$$P_h^2 u = P_h \underbrace{P_h u}_{\in V_h} = P_h u \quad \forall u \in \mathcal{V}$$

und damit die Idempotenz von P_h .

Zusammenhang zwischen T_h und P_h . Sei $u \in \mathcal{V}$ beliebig, so gilt:

$$a(P_h T u, w) = a(T u, w) = b(u, w) \quad \forall w \in W_h$$

Dies ist gerade die Definition von T_h , d.h. $P_h T = T_h$. □

3.2 Konvergenz des diskreten Problems gegen das kontinuierliche Problem

Um die Frage zu beantworten, inwiefern die Lösungen der endlichdimensionalen variationellen Eigenwertprobleme (3.3) gegen die Lösung des unendlichdimensionalen variationellen Eigenwertproblems (2.1) konvergieren, benötigen wir zuerst einmal einen geeigneten Konvergenzbegriff. Dieser muss zu einem beliebigem Eigenwert λ (außer der Null) des unendlichdimensionalen Problems mit algebraischer Vielfachheit m_λ garantieren, dass genau m_λ Eigenwerte des diskreten Problems (wiederholt nach algebraischer Vielfachheit) $\lambda_h^1, \dots, \lambda_h^{m_\lambda}$ gegen λ konvergieren.

Wie in [3] ausführlich besprochen wird, benötigt ein sinnvoller Konvergenzbegriff jedoch noch mehr als die bloße Existenz von Eigenwerten respektive Eigenfunktionen, die mit den entsprechenden Vielfachheiten gegen die tatsächlichen konvergieren. Es ist weiterhin nötig zu fordern, dass keine unechten Eigenwerte auftreten. Das bedeutet, dass für diskrete Probleme, die das eigentliche Problem “genügend gut approximieren” gelten soll, dass nur die Eigenwerte “sehr nah” an dem zu approximierenden Eigenwert sind, die auch gegen ihn konvergieren. Das Problem der unechten oder störenden (engl. spurious) Eigenwerte ist ein Problem, dessen Abwesenheit wir für eine sinnvolle Konvergenz benötigen. Eine Möglichkeit, dem zu begegnen, ist die Anordnung von Eigenwerten (nach einer bestimmten Ordnung). Dann fordern wir das der k -te Eigenwert des diskreten Problems gegen den k -ten

3.2 Konvergenz des diskreten Problems gegen das kontinuierliche Problem

Eigenwert des kontinuierlichen Problems konvergiert. Dieser Konvergenzbegriff schließt das Vorhandensein von zusätzlichen, unechten Eigenwerten aus, da dadurch die Ordnung der Eigenwerte gestört würde.

Die Konvergenz der Eigenfunktionen des diskreten Problems gegen die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Problems ist in dem Sinne zu verstehen, dass der Abstand (wie in Definition 1.5.6) zwischen dem verallgemeinerten Eigenraum des diskreten Problems und dem verallgemeinerten Eigenraum des kontinuierlichen Problems gegen Null konvergiert. Wir werden uns in dieser Arbeit nicht mit unechten Eigenwerten beschäftigen, sondern uns mit einer „lokalen“ Form der Konvergenz auseinandersetzen. Wir formulieren unseren Gedankengang in der folgenden

Definition 3.2.1 (Konvergenz von Eigenwerten und Eigenfunktion)

Wir sagen, dass die Lösungen des diskreten Eigenwertproblems (3.3) gegen die Lösungen des kompakten Eigenwertproblems (2.1) konvergieren, oder kurz T_h konvergiert gegen T lokal spektral⁵, wenn für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ beliebig mit algebraischer Vielfachheit m_λ genau m_λ Eigenwerte wiederholt nach algebraischer Vielfachheit $\lambda_h^1, \dots, \lambda_h^{m_\lambda} \in \sigma(T_h)$ existieren, sodass gilt:

- i) die λ_h^i konvergieren gegen λ , das heißt

$$|\lambda_h^i - \lambda| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

- ii) für alle $\epsilon > 0$ existiert ein h_0 , sodass für $0 < h < h_0$, und $\lambda_h \in \sigma(T_h)$ mit

$$|\lambda_h - \lambda| < \epsilon$$

folgt $\lambda_h = \lambda_h^i$ für ein $i \in \{1, \dots, m_\lambda\}$,

- iii) für den verallgemeinerten Eigenraum E^λ zum Eigenwert λ und Operator T und die verallgemeinerten Eigenräume $E_h^{\lambda^i}$ der Eigenwerte λ_h^i gilt

$$\hat{\delta}(E^\lambda, \bigoplus_{i=1}^{m_\lambda} E_h^{\lambda^i}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Wir werden nun mit Methoden aus [15] zeigen, dass die Operatoren T_h stark gegen den Operator T konvergieren um dann unter Verwendung der

⁵Der Begriff spektral bezieht sich auf die Konvergenz des Spektrums, der Begriff lokal schließt hierbei das Auftreten unechter Eigenwerte nicht aus. Im wesentlichen bezieht sich diese Definition auf die von Boffi in [3, Teil 2, Kapitel 7] für selbstadjungierte Eigenwertprobleme formulierte Konvergenzdefinition.

3.2 Konvergenz des diskreten Problems gegen das kontinuierliche Problem

Kompaktheit des Operators T daraus die Konvergenz in Operatornorm zu folgern. Zum Ende dieses Abschnittes werden wir mit störungstheoretischen Mitteln zeigen, dass die Konvergenz in Norm, die Konvergenz nach Definition 3.2.1 bereits beinhaltet. Wir beginnen unsere Ausführungen mit folgendem

Lemma 3.2.2

Sei $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$ ein Hilbertraum und $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine nicht triviale idempotente, lineare Abbildung, d.h.

$$0 \neq P = P^2 \neq 1$$

Dann gilt:

$$\|P\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|1 - P\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Beweis. Siehe hierzu [15] Abschnitt 4.

Satz 3.2.3 (Starke Konvergenz der Galerkinapproximationen)

Seien a, T, T_h und P_h wie oben, so gelten für $u \in \mathcal{V}$ beliebig:

$$\|u - P_h u\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\|a\|}{\gamma_h} \inf_{u_h \in V_h} \|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \quad (3.7)$$

und

$$\|Tu - T_h u\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\|a\|}{\gamma_h} \inf_{u_h \in V_h} \|Tu - u_h\|_{\mathcal{V}}$$

mit (3.2) folgt dann,

$$\|u - P_h u\|_{\mathcal{V}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \forall u \in \mathcal{V}$$

und

$$\|Tu - T_h u\|_{\mathcal{V}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \forall u \in \mathcal{V}.$$

Beweis. Seien $u \in \mathcal{V}$ und $v_h \in V_h$ beliebig. Da ohne Beschränkung der Allgemeinheit P_h dem Lemma 3.2.2 genügt, folgt:

$$\begin{aligned} \|u - P_h u\|_{\mathcal{V}} &= \|(1 - P_h)(u - v_h)\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \|1 - P_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}} \\ &= \|P_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

3.2 Konvergenz des diskreten Problems gegen das kontinuierliche Problem

Weiter folgt aus der diskreten inf-sup-Bedingung (3.1a):

$$\gamma_h \leq \sup_{w_h \in W_h} \frac{a(P_h u, w_h)}{\|P_h u\|_{\mathcal{V}} \|w_h\|_{\mathcal{W}}}$$

und somit

$$\|P_h u\|_{\mathcal{V}} \leq \sup_{w_h \in W_h} \frac{a(P_h u, w_h)}{\gamma_h \|w_h\|_{\mathcal{W}}} = \sup_{w_h \in W_h} \frac{a(u, w_h)}{\gamma_h \|w_h\|_{\mathcal{W}}} \leq \frac{\|a\|}{\gamma_h} \|u\|_{\mathcal{V}}.$$

Unter Verwendung der Zwischenergebnisse folgen:

$$\begin{aligned} \|u - P_h u\|_{\mathcal{V}} &\leq \|P_h\| \inf_{u_h \in V_h} \|u - u_h\| \\ &\leq \frac{\|a\|}{\gamma_h} \inf_{u_h \in V_h} \|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

und mit der Darstellung $T_h = P_h T$ folgt

$$\begin{aligned} \|Tu - T_h u\|_{\mathcal{V}} &= \|(1 - P_h)Tu\| \\ &\leq \|P_h\| \inf_{u_h \in V_h} \|Tu - u_h\| \\ &\leq \frac{\|a\|}{\gamma_h} \inf_{u_h \in V_h} \|Tu - u_h\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

□

Satz 3.2.4 (Normkonvergenz der Galerkinapproximation)

Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt

$$\|T - T_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Beweis. Wegen Satz 3.2.3 gilt: P_h konvergiert stark gegen die Identität für $h \rightarrow 0$. Weiter ist T ein kompakter Operator. Mit Satz 1.3.5 und Lemma 3.1.3 folgt dann:

$$\|T - T_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} = \|(1 - P_h)T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

□

Nun werden wir mithilfe von Satz 3.2.4 wie bereits angekündigt, die Konvergenz nach Definition 3.2.1 folgern.

3.2 Konvergenz des diskreten Problems gegen das kontinuierliche Problem

Satz 3.2.5 (Normkonvergenz liefert lokale Spektralkonvergenz)

Das Problem (3.3) konvergiert im Sinne von Definition 3.2.1 gegen das Problem (2.1), wenn die Operatoren T_h in Norm gegen T konvergieren.

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von T . Da λ nach Satz 1.4.7 kein Häufungspunkt des Spektrums ist, existiert zu $\epsilon > 0$ genügend klein ein Kreisring Γ mit Mittelpunkt λ und Radius ϵ , sodass λ von Γ umschlossen wird, d.h. es ist $\max_{z \in \Gamma} |z - \lambda| \leq \epsilon$ und alle Punkte des Spektrums außer λ liegen außerhalb von Γ . Dann existiert nach Satz 1.5.1, Satz 1.5.9 und Satz 1.5.11 ein $\delta > 0$, sodass aus $\|T - T_h\| \leq \delta$ folgt, dass Γ in $\rho(T_h)$ liegt und $\dim(E^\lambda) = \dim(E_h^\lambda)$ sowie $\|E_h(\lambda) - E(\lambda)\| < \epsilon$ ist für

$$E_h(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - T_h)^{-1} dz$$

und

$$E_h^\lambda := E_h(\lambda)\mathcal{V}.$$

Wir wählen nun $h_0 > 0$ derart, dass

$$\|T - T_h\| \leq \delta \quad \forall h \in (0, h_0)$$

gilt. Wegen $\dim(E^\lambda) = \dim(E_h^\lambda)$ und Korollar 1.5.3 folgt $\dim(E_h^\lambda) = m_\lambda$, wobei m_λ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ zu T ist. Ebenfalls Korollar 1.5.3 und Bemerkung 1.5.4 sowie die Definition der E_h^λ liefert uns, dass innerhalb von Γ gezählt nach algebraischer Vielfachheit genau m_λ Eigenwerte liegen. Diese Eigenwerte sind (mit beliebiger Nummerierung) die gesuchten λ_h^i mit $i = 1, \dots, m_\lambda$. Es gilt für $\lambda_h \in \sigma(T_h)$ mit $|\lambda_h - \lambda| < \epsilon$, dass λ_h von Γ umschlossen wird und daher folgt $\lambda_h = \lambda_h^i$ für ein $i \in \{1, \dots, m_\lambda\}$. Weiter gilt für $v \in E^\lambda$ mit $\|v\|_{\mathcal{V}} = 1$:

$$\begin{aligned} \inf_{w \in E_h^\lambda} \|v - w\|_{\mathcal{V}} &\leq \|v - E_h(\lambda)v\|_{\mathcal{V}} \\ &= \|E(\lambda)v - E_h(\lambda)v\| \\ &\leq \|E(\lambda) - E_h(\lambda)\| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Und daher gilt $\delta(E^\lambda, E_h^\lambda) \leq \epsilon$. Weiter folgt für $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ und mit Satz 1.5.7:

$$\begin{aligned} \delta(E_h^\lambda, E^\lambda) &\leq \frac{\delta(E^\lambda, E_h^\lambda)}{1 - \delta(E^\lambda, E_h^\lambda)} \\ &\leq 2\delta(E^\lambda, E_h^\lambda) \end{aligned}$$

und daher auch

$$\hat{\delta}(E^\lambda, \bigoplus_{i=1}^{m_\lambda} E_h^{\lambda^i}) < 2\epsilon. \quad (3.8)$$

Die Konstruktion der $\lambda_h^1, \dots, \lambda_h^n$, (3.8) und da $\lambda \neq 0$ beliebig gewählt war, liefert die Konvergenz nach Definition 3.2.1. \square

Wir haben in diesem Abschnitt gezeigt, dass man das kompakte variationelle Eigenwertproblem (2.1), dass den Bedingungen (2.3) genügt, beliebig genau mittels Galerkinapproximation, die den Bedingungen (3.1) und (3.2) genügen, approximieren und damit im Prinzip auch lösen kann (falls die Lösungen der endlichdimensionalen Probleme sich in genügend genauer Weise lösen lassen). Wir weisen noch einmal darauf hin, dass wir das Problem der unechten Eigenwerte außer Acht gelassen und nur die lokale Konvergenz betrachtet haben.

Der Beweis von Satz 3.2.5 liefert uns die Motivation zu untersuchen inwiefern die Konvergenz eines bestimmten Eigenwertes, respektive zugehöriger Eigenfunktionen sich nicht nur durch den Abstand von T_h zu T abschätzen lässt, sondern sogar von dem Abstand von T_h zu T eingeschränkt auf die verallgemeinerten Eigenräume. Dies werden wir im folgenden Abschnitt näher betrachten und uns gleichzeitig mit der Konvergenzordnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen in Abhängigkeit von (3.2) beschäftigen.

4 Die Babuška-Osborn Theorie über spektrale Konvergenz

Dieser Abschnitt beruht im wesentlichen auf den Ausführungen von [2] und wird uns, nachdem wir die Konvergenz des diskreten gegen das kontinuierliche Problem im letzten Abschnitt gezeigt haben, die Mittel bereitstellen, um die Konvergenzordnungen von Galerkinapproximationen abzuschätzen.

Wir werden in diesem Abschnitt wie in [2] erst Abschätzungen für die Konvergenz von Eigenwerten respektive zugehörigen Eigenfunktionen kompakter Operatoren betrachten und diese dann mittels der Äquivalenz des variationellen Eigenwertproblems zu dem eines kompakten Operators auf die eigentliche Thematik übertragen.

4.1 Spektrale Approximation kompakter Operatoren

In diesem Abschnitt sei $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ ein komplexer Hilbertraum, h ein reeller Parameter und $T, \{T_h\}_h \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit $\|T - T_h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Wir wollen die Ordnung

der spektralen Konvergenz im Sinne von Definition 3.2.1 in Größenordnungen von $\|T - T_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ bzw. $\|(T - T_h)|_{E^\mu}\|_{\mathcal{L}(E^\mu, \mathcal{H})}$ abschätzen, wobei $\mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ und E^μ der verallgemeinerte Eigenraum von T zum Eigenwert μ ist.

Wie wir in Satz 3.2.5 gezeigt haben, gilt nach Voraussetzung auch Konvergenz im Sinne von Definition 3.2.1. Das heißt zu einem nicht verschwindenden Eigenwert $\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ und einem Kreisring Γ mit Mittelpunkt μ , der keinen weiteren Punkt außer μ aus dem Spektrum umschließt, liefern uns Satz 1.5.9 und Satz 1.5.11, die Existenz eines $\delta > 0$, sodass für h_0 mit $\|T - T_h\| < \delta$ für alle $h < h_0$ die Projektion

$$E_h(\mu) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - T_h)^{-1} dz$$

wohldefiniert ist, da $\Gamma \subset \rho(T_h)$ gilt. Definieren wir nun für $E_h^\mu := E_h(\mu)\mathcal{H}$, so folgt $\dim(E_h^\mu) = \dim(E^\mu)$ (wegen unserer Wahl von h_0). Wir stellen mittels der Bemerkung 1.5.4 für die Eigenwerte von T_h : μ_1, \dots, μ_M , die von Γ umschlossen werden, fest, dass für die direkte Summe der Eigenräume $E_h^\mu = \bigoplus_{i=1}^M E^{\mu_i}$ gilt. Weiter gilt dann für

$$E(\mu) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - T)^{-1} dz$$

dass $\|E(\mu) - E_h(\mu)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Für die erste Abschätzung über den Abstand von E_h^μ zu E^μ benötigen wir das folgende

Lemma 4.1.1 (Gleichmäßige Beschränktheit der Resolvente)

Sei X ein Banachraum und $T, \{T_h\}_h \subseteq \mathcal{L}(X)$ sodass $\|T - T_h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Sei weiter $\Gamma \subset \rho(T)$ eine kompakte Menge und $\Gamma \subseteq \rho(T_h)$ für h genügend klein. So existiert ein $h_0 > 0$ und eine Konstante M , sodass

$$\sup_{h < h_0} \sup_{z \in \Gamma} \|(z - T_h)^{-1}\| \leq M < \infty$$

gilt.

Beweis. Da $R_z(T) : \rho(T) \rightarrow \mathcal{L}(X)$, $z \mapsto (z - T)^{-1}$ eine (stückweise) holomorphe Funktion ist [14, Kapitel VI, Abschnitt 1], folgt, dass

$$\hat{R}_z(T)|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad z \mapsto \|(z - T)^{-1}\|$$

4.1 Spektrale Approximation kompakter Operatoren

eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist. Daher existiert ein $M > 0$ mit $\|(z - T)^{-1}\| \leq M$ für alle $z \in \Gamma$. Damit folgt für beliebige $z \in \Gamma$:

$$\|(z - T)v\| \geq \frac{1}{M} \|v\| \quad \text{für alle } v \in X.$$

Denn angenommen es existiert ein $v \in X$ mit $\|v\| = 1$ und ein $\epsilon > 0$, sodass $\|(z - T)v\| = (\frac{1}{M} - \epsilon)$ gilt, dann folgt:

$$\begin{aligned} \|(z - T)^{-1} \underbrace{(z - T) \frac{v}{M^{-1} - \epsilon}}_{\|\cdot\|=1}\| &= \underbrace{\frac{1}{M^{-1} - \epsilon}}_{< M^{-1}} \\ &> M, \end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, dass $\|(z - T)^{-1}\| \leq M$ gilt. Also muss $\|z - T\| \geq \frac{1}{M}$ gelten. Setze nun h_0 klein genug, dass für $h < h_0$ auch $\|T_h - T\| \leq \frac{1}{2M}$ gilt. Dann folgt für beliebige $z \in \Gamma$, $v \in X$ und für $h < h_0$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|(z - T_h)v\| &= \|(z - T_h)v - (z - T)v + (z - T)v\| \\ &= \|(T - T_h)v + (z - T)v\| \\ &\geq \left| \|(T - T_h)v\| - \|(z - T)v\| \right| \\ &\geq \|(z - T)v\| - \|(T - T_h)v\| \\ &\geq \frac{1}{M} \|v\| - \frac{1}{2M} \|v\| = \frac{1}{2M} \|v\| \end{aligned}$$

Und damit:

$$\|v\| = \|(z - T_h)(z - T_h)^{-1}v\| \geq \frac{1}{2M} \|(z - T_h)^{-1}v\|$$

und das heißt:

$$\|(z - T_h)^{-1}v\| \leq 2M \|v\|.$$

Also gilt $\|(z - T_h)^{-1}\| \leq 2M$ für alle $z \in \Gamma$ und $h < h_0$. Daher folgt:

$$\sup_{h < h_0} \sup_{z \in \Gamma} \|(z - T_h)^{-1}\| \leq 2M < \infty$$

und damit die Behauptung. □

Satz 4.1.2 (Abschätzung für den Abstand verallgemeinerter Eigenräume)
 Sei nun also $\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, so existiert eine von h unabhängige Konstante C , sodass für alle genügend kleinen h gilt:

$$\hat{\delta}(E^\mu, E_h^\mu) \leq C \|(T - T_h)|_{E^\mu}\|_{\mathcal{L}(E^\mu, \mathcal{H})}.$$

Hierbei ist $(T - T_h)|_{E^\mu}$ die Restriktion von $(T - T_h)$ auf E^μ .

Beweis. Für $v \in E^\mu$ mit $\|v\| = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \|v - E_h(\mu)v\| &= \|E(\mu)v - E_h(\mu)v\| \\ &\leq \|E(\mu) - E_h(\mu)\| \end{aligned}$$

und da $\|E(\mu) - E_h(\mu)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ folgt damit auch $\delta(E^\mu, E_h^\mu) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Mit Satz 1.5.7 folgt für h , sodass $\delta(E^\mu, E_h^\mu) \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \delta(E_h^\mu, E^\mu) &\leq \frac{\delta(E^\mu, E_h^\mu)}{1 - \delta(E^\mu, E_h^\mu)} \\ &\leq 2\delta(E^\mu, E_h^\mu) \end{aligned}$$

und somit mittels Proposition 1.5.8

$$\hat{\delta}(E^\mu, E_h^\mu) \leq 2\delta(E^\mu, E_h^\mu) \leq 2\|E(\mu) - E_h(\mu)\|.$$

Um die Aussage des Satzes zu zeigen, werden wir nun $\|E(\mu) - E_h(\mu)\|$ durch $C\|(T - T_h)\|$ abschätzen. Für $v \in E^\mu$ folgt unter Verwendung der zweiten Resolventenidentität (Korollar 1.4.3):

$$\begin{aligned} \|v - E_h(\mu)v\| &= \|E(\mu)v - E_h(\mu)v\| & (4.1) \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[(z - T)^{-1} - (z - T_h)^{-1} \right] v \, dz \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - T_h)^{-1} (T - T_h) (z - T)^{-1} v \, dz \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \lambda(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} \|(z - T)^{-1}\| \sup_{z \in \Gamma} \|(z - T_h)^{-1}\| \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|v\|. \end{aligned}$$

Nun existiert nach Lemma 4.1.1 ein M und ein $h_0 > 0$ sodass gilt:

$$\sup_{h < h_0} \sup_{z \in \Gamma} \|R_z(T_h)\| \leq M < \infty$$

für M unabhängig von h und z . Damit folgt für

$$C := \frac{M}{\pi} \lambda(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} \|(z - T)^{-1}\|$$

und $\|v\| = 1$ die Behauptung, wobei λ das Lebesguemaß (das Längenmaß) ist. □

Bemerkung 4.1.3

Wir haben uns bisher überhaupt nicht um die Definition der Integrale gekümmert, mit denen wir die Projektionen auf die verallgemeinerten Eigenräume beschreiben. Daher ist ersteinmal nicht klar ob man die Dreiecksungleichung wie in der Abschätzung des obigen Satzes geschehen, überhaupt verwenden darf. Tatsächlich wäre es, selbst wenn wir eine Definition eines Integrals über Operatoren angegeben hätten, apriori nicht klar ob das Integral über die Resolvente überhaupt wohldefiniert ist bzw. existiert. Wir werden alle diese Nachweise weiterhin schuldig bleiben und rechtfertigen unsere Vorgehensweise nicht mathematisch, sondern indem wir auf das Vorgehen von Babuška und Osborn in [2] verweisen, die die obigen Abschätzungen in den präkeren Stellen exakt so durchführen.

Die zentrale Abschätzung des Beweises von Satz 4.1.2 liefert mit Blick auf (4.1) außerdem auch die Abschätzung:

$$\|E(\mu)v - E_h(\mu)v\| \leq C \|(T - T_h)|_{E^\mu}\|_{\mathcal{L}(E^\mu, \mathcal{H})}$$

die wir im Folgenden noch benötigen werden.

Der obige Satz lieferte uns die intuitive Aussage, dass die Approximation der verallgemeinerten Eigenräume nicht von der Geschwindigkeit der Konvergenz der T_h in Norm gegen T abhängt. Sie hängt lediglich von der Geschwindigkeit der Konvergenz auf dem verallgemeinerten Eigenraum ab. Für das nächste Resultat, dass Babuška und Osborn für die Konvergenzgeschwindigkeit des arithmetischen Mittels der approximierenden Eigenwerte liefern, benötigen wir das folgende Ergebnis.

Lemma 4.1.4

Es existiert ein $h_0 > 0$, sodass für alle $h < h_0$ die Abbildung $E_h(\mu)|_{E^\mu} : E^\mu \rightarrow$

E_h^μ bijektiv ist. Dann existiert die Inverse

$$E_h(\mu)^{-1} := (E_h(\mu)|_{E^\mu})^{-1} : E_h^\mu \rightarrow E^\mu$$

und es existiert eine Konstante C , sodass $\|E_h(\mu)^{-1}\| \leq C$ ist für alle $h \leq h_0$.
Der Operator:

$$\hat{T}_h := E_h(\mu)^{-1} T_h E_h(\mu)|_{E^\mu} : E^\mu \rightarrow E^\mu$$

besitzt das Spektrum $\sigma(T) = \{\mu_{1,h}, \dots, \mu_{m,h}\}$ wobei die $\mu_{i,h}$ die selben algebraischen respektive geometrischen Vielfachheiten besitzen wie als Eigenwerte von T_h .

Beweis. Wir zeigen zuerst: Für kleine h ist der Operator

$$E_h(\mu)|_{E^\mu} : E^\mu \rightarrow E_h^\mu$$

bijektiv. Sei dazu h_0 so klein, dass $\|E(\mu) - E_h(\mu)\| < \frac{1}{2}$ für alle $h \in (0, h_0)$ gilt. Dann folgt für $v \in E^\mu$ und $E_h(\mu)v = 0$:

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|E(\mu)v\| = \|E(\mu)v - E_h(\mu)v\| \\ &\leq \|E(\mu) - E_h(\mu)\| \|v\| \\ &< \frac{1}{2} \|v\|, \end{aligned}$$

womit sofort $v = 0$ und damit die Injektivität der linearen Abbildung $E_h(\mu)|_{E^\mu}$ folgt. Für genügend kleine h folgt außerdem nach dem Satz 1.5.11, dass $\dim E^\mu = \dim E_h^\mu$ ist, womit nach Ergebnissen der Linearen Algebra aus der Injektivität die Bijektivität von $E_h(\mu)|_{E^\mu}$ folgt. Damit ist also $E_h(\mu)|_{E^\mu}$ invertierbar und wir definieren

$$E_h(\mu)^{-1} := (E_h(\mu)|_{E^\mu})^{-1}.$$

Für $h < h_0$ gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und $v \in E^\mu$ mit $\|v\| = 1$:

$$\begin{aligned} 1 - \|E_h(\mu)v\| &= \|E(\mu)v\| - \|E_h(\mu)v\| \\ &\leq \|E(\mu)v - E_h(\mu)v\| \\ &\leq \|E(\mu) - E_h(\mu)\| \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

woraus sofort $\|E_h(\mu)v\| \geq \frac{1}{2}\|v\|$ für alle $v \in E^\mu$ folgt. Sei nun $w \in E_h^\mu$ beliebig, so folgt:

$$\|w\| = \|E_h(\mu)E_h(\mu)^{-1}w\| \geq \frac{1}{2}\|E_h(\mu)^{-1}w\|.$$

Und daraus folgt: $\|E_h(\mu)^{-1}\| \leq 2$. Also ist $E_h(\mu)^{-1}$ beschränkt für $h \leq h_0$. Offensichtlich ist $E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu)|_{E^\mu} = 1|_{E^\mu}$. Nun definieren wir

$$\hat{T}_h = E_h^{-1}(\mu)T_hE_h(\mu)|_{E^\mu} : E^\mu \rightarrow E^\mu.$$

Da $E_h(\mu)|_{E^\mu}E^\mu = E_h^\mu$ gilt und E_h^μ T_h -invariant ist (denn E_h^μ ist direkte Summe aus verallgemeinerten Eigenräumen) ist \hat{T}_h wohldefiniert. Weiter gilt $\sigma(\hat{T}_h) = \{\mu_{1,h}, \dots, \mu_{m,h}\}$ und die geometrischen respektive algebraischen Vielfachheiten stimmen mit denen von T_h überein. Dies sieht man, wenn man für $v \in E_h^\mu$ den Operator \hat{T}_h auf $E_h(\mu)^{-1}v$ anwendet. \square

Für das nächste Resultat erinnern wir an die Spur einer linearen endlich-dimensionalen Abbildung, die für eine Matrixdarstellung der linearen Abbildung bezüglich einer Basis als Summe der Diagonalelemente definiert ist. Die Spur ist von der Wahl der Basis unabhängig und linear als Abbildung vom Raum der linearen Funktionen in die komplexen Zahlen. In einem Hilbertraum kann man die Spur einer linearen Abbildung A , für eine Orthonormalbasis $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ dann auch in der Form

$$\text{spur } A := \sum_{i=1}^m (A\varphi_i, \varphi_i)$$

darstellen, siehe [14, Kapitel VI, Abschnitt 5].

Nun sei $m = \dim(E^\mu)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes μ von T und $\mu_{1,h}, \dots, \mu_{m,h}$ die nach algebraischer Vielfachheit wiederholten Eigenwerte von T_h , die gegen μ konvergieren. Dann definieren wir das arithmetische Mittel der approximierenden Eigenwerte

$$\hat{\mu}_h := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu_{i,h}$$

und zeigen für dieses den

Satz 4.1.5 (Abschätzung für die Konvergenz des Mittelwertes)

Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ eine Orthonormalbasis des verallgemeinerten Eigenraumes von T zum Eigenwert μ , den wir wie gehabt mit E^μ bezeichnen. Sei weiter $\varphi_i^* := E(\mu)^*\varphi_i$ für $i = 1, \dots, m$. Dann existiert eine Konstante C , die unabhängig von h ist, sodass gilt:

$$|\mu - \hat{\mu}_h| \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |((T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}}| + C\|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^{\mu^*}}\|,$$

wobei $E^{\mu*}$ der verallgemeinerte Eigenraum von T^* zum Eigenwert $\bar{\mu}$ ist⁶.

Beweis. Seien E_h^{-1} und \hat{T}_h wie in Lemma 4.1.4. Sei weiter $\hat{T} = T|_{E^\mu}$. Dann ist das Spektrum von \hat{T} wegen der T -Invarianz von E^μ wohldefiniert und es gilt $\sigma(\hat{T}) = \{\mu\}$, wobei μ bezüglich \hat{T} die selben algebraischen respektive geometrischen Vielfachheiten besitzt wie als Eigenwert von T .

Daher folgt für $m = \dim(E^\mu) = \dim(E_h^\mu)$, dass $\text{spur}\hat{T} = m\mu$ und $\text{spur}\hat{T}_h = m\hat{\mu}_h$ gilt. Da \hat{T} und \hat{T}_h beide Abbildungen von E^μ in E^μ sind, folgt mit der Linearität der Spur:

$$\mu - \hat{\mu}_h = \frac{1}{m} \text{spur}(\hat{T} - \hat{T}_h).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mu - \hat{\mu}_h &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m ((\hat{T} - \hat{T}_h)\varphi_j, \varphi_j)_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (E(\mu)(\hat{T} - \hat{T}_h)\varphi_j, \varphi_j)_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m ((\hat{T} - \hat{T}_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es gilt, da $E(\mu)$ und T miteinander kommutieren für die Aufsteigende α zum Eigenwert μ :

$$\begin{aligned} (x, (\bar{\mu} - T^*)^\alpha \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} &= (x, (\bar{\mu} - T^*)^\alpha E(\mu)^* \varphi_j)_{\mathcal{H}} \\ &= ((\mu - T)^\alpha x, E(\mu)^* \varphi_j)_{\mathcal{H}} \\ &= (E(\mu)(\mu - T)^\alpha x, \varphi_j)_{\mathcal{H}} \\ &= ((\mu - T)^\alpha E(\mu)x, \varphi_j)_{\mathcal{H}} \\ &= 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Das aber heißt, dass $\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*$ verallgemeinerte Eigenvektoren zum Operator T^* und dem Eigenwert $\bar{\mu}$ sind. Da $E_h(\mu)$ und T_h miteinander kommutieren und $E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu)|_{E^\mu}$ die Identität auf E^μ ist, folgt:

$$\begin{aligned} ((\hat{T} - \hat{T}_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} &= (T\varphi_j - E_h(\mu)^{-1}T_h E_h(\mu)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &= (E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu)(T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &= ((T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} + ((E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu) - 1)(T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

⁶Dieser Raum ist wegen dem Satz von Schauder (Satz 1.2.3) wohldefiniert.

Sei nun $L_h := E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu)$. So folgern wir:

$$\begin{aligned} & ((E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu) - 1)(T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &= ((T - T_h)\varphi_j, (E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu) - 1)^*\varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &= ((T - T_h)\varphi_j, (E_h(\mu)^*E_h(\mu)^{*^{-1}} - 1)\varphi_j^*)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Und da für beliebiges $v \in \mathcal{H}$ gilt

$$(v, (E_h(\mu)^*E_h(\mu)^{*^{-1}} - 1)E_h(\mu)^*\varphi_j^*)_{\mathcal{H}} = 0$$

und $\varphi^* = E(\mu)^*\varphi^*$ ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} & ((E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu) - 1)(T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &= ((T - T_h)\varphi_j, (E_h(\mu)^*E_h(\mu)^{*^{-1}} - 1)E(\mu)^*\varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &\quad - ((T - T_h)\varphi_j, (E_h(\mu)^*E_h(\mu)^{*^{-1}} - 1)E_h(\mu)^*\varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &= ((T - T_h)\varphi_j, (L_h^* - 1)(E(\mu)^* - E_h(\mu)^*)\varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &= ((L_h - 1)(T - T_h)\varphi_j, (E(\mu)^* - E_h(\mu)^*)\varphi_j^*)_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Aus (4.5) und aus der Beschränktheit der L_h ⁷ in h folgt mit Blick auf den letzten Teil der Bemerkung 4.1.3:

$$\begin{aligned} & |((E_h(\mu)^{-1}E_h(\mu) - 1)(T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}}| \\ &= ((L_h - 1)(T - T_h)\varphi_j, (E(\mu)^* - E_h(\mu)^*)\varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &\leq (\sup_h \|L_h - 1\|) \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(E(\mu)^* - E_h(\mu)^*)|_{E^\mu}\| \|\varphi_j\| \|\varphi_j^*\| \\ &\leq C \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^\mu}\|. \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in (4.4) liefert:

$$\begin{aligned} & ((\hat{T} - \hat{T}_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} \\ &\leq ((T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}} + C \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^\mu}\| \end{aligned}$$

und dies eingesetzt in (4.2) liefert die Behauptung. \square

Falls die algebraische Vielfachheit unseres Eigenwertes gleich eins ist, haben wir mit dem obigen Satz auch sofort eine Abschätzung für die Konvergenz unseres Eigenwertes gefunden. Falls die algebraische Vielfachheit ungleich eins ist, lässt sich über die Konvergenz der Eigenwerte $\mu_{i,h}$ der T_h gegen μ aus obigem Satz noch keine Schlussfolgerung ziehen. Abhilfe schafft der nächste Satz, der uns auch aufführt, dass das arithmetische Mittel $\hat{\mu}_h$ im Allgemeinen schneller gegen μ konvergiert als ein einzelner Eigenwert. Doch zunächst formulieren wir das

⁷Diese folgt aus der Definition und Lemma 4.1.4.

Lemma 4.1.6 (Operator Identität)

Seien $T, S \in \mathcal{L}(X)$ und $\mu \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$(\mu - T)^\alpha - (\mu - S)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha-1} (\mu - S)^k (S - T) (\mu - T)^{\alpha-k-1}.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptungen per Induktion. Sei dazu $\alpha = 1$, dann gilt

$$(\mu - T) - (\mu - S) = S - T.$$

Das ist aber gerade die Rechte Seite für $\alpha = 1$. Sei nun $\alpha + 1 \geq 2$, dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\alpha} (\mu - S)^k (S - T) (\mu - T)^{\alpha-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha-1} (\mu - S)^k (S - T) (\mu - T)^{\alpha-1-k} (\mu - T) + (\mu - S)^\alpha (S - T) \\ &= ((\mu - T)^\alpha - (\mu - S)^\alpha) (\mu - T) + (\mu - S)^\alpha (S - T) \\ &= (\mu - T)^{\alpha+1} - (\mu - S)^\alpha (\mu - T + T - S) \\ &= (\mu - T)^{\alpha+1} - (\mu - S)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Wobei wir nach dem zweiten Gleichheitszeichen den Induktionsschritt ausführen. □

Satz 4.1.7 (Abschätzung für die Konvergenz der Eigenwerte)

Sei α die Aufsteigende von T zum Eigenwert μ . Sei weiter $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ eine Orthonormalbasis von E^μ und $\varphi_i^* := E(\mu)^* \varphi_i$ für $i = 1, \dots, m$. Dann existiert eine von h unabhängige Konstante $C > 0$, sodass gilt:

$$|\mu - \mu_{j,h}| \leq C \left\{ \sum_{i,k=1}^m |((T - T_h)\varphi_i, \varphi_k^*)_{\mathcal{H}}| + \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^{\mu^*}}\| \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

für $j = 1, \dots, m$.

Beweis. Seien nun $E_h(\mu)^{-1}$ und \hat{T}_h wie in Lemma 4.1.4 und h genügend klein. Und sei $\mu_{j,h}$ ein Eigenwert von \hat{T}_h . Sei weiter $w_h \in E^\mu$ mit $\|w_h\| = 1$

ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_{j,h}$, d.h. es gilt: $\hat{T}_h w_h = \mu_{j,h} w_h$. Wir wählen nun $w_h^* := E(\mu)^* w_h \in \ker(\bar{\mu} - T^*)$ ⁸ und folgern

$$|(w_h, w_h^*)_{\mathcal{H}}| = |(E(\mu)w_h, w_h)_{\mathcal{H}}| \leq \|w_h\|^2 = 1.$$

Da $\|w_h\| = 1$ gilt, folgt $\|w_h^*\| \leq \|E(\mu)\|$ für beliebige h . Dann folgt, da $(T^* - \bar{\mu})^\alpha w_h^* = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & |\mu - \mu_{j,h}|^\alpha \\ & \leq |((\mu - \mu_{j,h})^\alpha w_h, w_h^*)_{\mathcal{H}}| \\ & = |((\mu - \mu_{j,h})^\alpha w_h, w_h^*)_{\mathcal{H}} - (w_h, (T^* - \bar{\mu})^\alpha w_h^*)_{\mathcal{H}}| \\ & = |((\mu - \mu_{j,h})^\alpha w_h - (T - \mu)^\alpha w_h, w_h^*)_{\mathcal{H}}|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Mit diesem Ergebnis, dem Lemma 4.1.6 (mit $S = \mu$) und (4.6) folgt:

$$\begin{aligned} & |\mu - \mu_{j,h}|^\alpha \\ & \leq \left| \left(\sum_{k=0}^{\alpha-1} (\mu_{j,h} - \mu)^k (\mu - T)^{\alpha-1-k} (\mu_{j,h} - T) w_h, w_h^* \right)_{\mathcal{H}} \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\alpha-1} |\mu - \mu_{j,h}|^k |((\mu_{j,h} - T) w_h, (\bar{\mu} - T^*)^{\alpha-1-k} w_h^*)_{\mathcal{H}}| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\alpha-1} |\mu - \mu_{j,h}|^k \|\bar{\mu} - T^*\|^{\alpha-1-k} \max_{v \in E^{\mu^*}, \|v\|=1} |((\mu_{j,h} - T) w_h, v)_{\mathcal{H}}| \|w_h^*\|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Und für $v \in E^{\mu^*}$ mit $\|v\| = 1$ beliebig, folgern wir, da w_h als Eigenwert von \hat{T}_h in E^μ liegt, E^μ ein \hat{T}_h (respektive T) invarianter Unterraum ist, $E_h(\mu)^{-1} E_h(\mu) = 1|_{E^\mu}$ gilt und T_h mit E_h^μ kommutiert:

$$\begin{aligned} & |((\mu_{j,h} - T) w_h, v)_{\mathcal{H}}| \\ & = |((\hat{T}_h - T) w_h, v)_{\mathcal{H}}| \\ & = |(E_h(\mu)^{-1} E_h(\mu) (T_h - T) w_h, v)_{\mathcal{H}}| \\ & = |((T_h - T) w_h, v)_{\mathcal{H}} + ((E_h(\mu)^{-1} E_h(\mu) - 1) (T_h - T) w_h, v)_{\mathcal{H}}| \\ & \leq |((T_h - T) w_h, v)_{\mathcal{H}}| + C \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^{\mu^*}}\| \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wobei die letzte Ungleichung wie im Beweis von Satz 4.1.5 folgt. Sei nun ψ_1, \dots, ψ_m eine Orthonormalbasis von E_h^μ und sei $A : E^\mu \rightarrow E_h^\mu$ die lineare Abbildung, die φ_i auf ψ_i abbildet. Dann gilt für beliebige $v \in E^{\mu^*}$ und

⁸Folgt aus dem Beweis des letzten Satzes mit der Gleichung (4.3).

$\|v\| = 1$ unter Anwendung der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 |((T_h - T)w_h, v)_{\mathcal{H}}| &\leq \sum_{i,k=1}^m |((T_h - T)(w_h, \psi_k)\psi_k, (v, \varphi_i^*)\varphi_i^*)_{\mathcal{H}}| \\
 &\leq \sum_{i,k=1}^m |((T_h - T)(w_h, A\varphi_k)A\varphi_k, (v, \varphi_i^*)\varphi_i^*)_{\mathcal{H}}| \\
 &\leq C \sum_{i,k=1}^m |((T_h - T)\varphi_k, \varphi_i^*)_{\mathcal{H}}|. \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Setzt man die Ungleichungen (4.9) in die Ungleichung (4.8) ein, folgt damit, eingesetzt in (4.7), die Behauptung. \square

Wir haben in Satz 4.1.2 den Abstand von E_h^μ zu E_μ mit einem Ausdruck der Form $C\|(T - T_h)|_{E^\mu}\|$ abgeschätzt. Unbeantwortet blieb jedoch die Frage, inwiefern Eigenvektoren u_h der Stufe k gegen Eigenvektoren von T der Stufe k konvergieren. Ein in dieser Hinsicht etwas präziseres Resultat, liefert der folgende Satz

Satz 4.1.8 (Konvergenz verallgemeinerter Eigenvektoren in Abhängigkeit ihrer Stufe)

Sei μ_h ein Eigenwert von T_h mit $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_h = \mu$. Seien weiter $w_h \in \mathcal{H}$ mit $\|w_h\| = 1$ und $(\mu_h - T_h)^k w_h = 0$ für ein $k \leq \alpha$ und genügend kleinem h . Dann existiert für jedes l mit $k \leq l \leq \alpha$ ein $u_h \in \mathcal{H}$, sodass $(\mu - T)^l u_h = 0$ und

$$\|u_h - w_h\| \leq C\|(T - T_h)|_{E^\mu}\|^{\frac{l-k+1}{\alpha}}$$

gilt.

Beweis. Wie in Korollar 1.5.3 gezeigt, ist der Raum $\ker((\mu - T)^l)$ endlichdimensional und daher abgeschlossen. Daher gilt für den abgeschlossenen Unterraum $M := (\ker((\mu - T)^l))^\perp$ von \mathcal{H} (vgl. [14, Kapitel V, Abschnitt 3]):

$$\mathcal{H} = \ker((\mu - T)^l) \oplus M.$$

Für $y \in \text{ran}((\mu - T)^l)$ ist die Gleichung $(\mu - T)^l x = y$ eindeutig lösbar auf M . D.h. die Abbildung $(\mu - T)^l|_M : M \rightarrow \text{ran}((\mu - T)^l)$ ist bijektiv und stetig,

also invertierbar⁹. Das heißt, die Abbildung $((\mu - T)|_M)^{-1}$ existiert und ist stetig. Das ist aber äquivalent zu der Aussage, dass ein $C > 0$ existiert, sodass

$$\|v\| \leq C\|(\mu - T)^l v\| \quad \text{für alle } v \in M \text{ gilt.}$$

Definieren wir nun $u_h := Pw_h$, wobei P die orthogonale Projektion auf $\ker((\mu - T)^l)$ ist, dann ist $(\mu - T)^l u_h = 0$ und $w_h - u_h \in M$. Daraus dürfen wir schliessen, dass

$$\|w_h - u_h\| \leq C\|(\mu - T)^l(w_h - u_h)\| \quad (4.10)$$

gilt. Nach Satz 4.1.2 existiert ein $\tilde{u}_h \in E^\mu$ und ein $C' > 0$ derart, dass \tilde{u}_h der Ungleichung

$$\|w_h - \tilde{u}_h\| \leq \sup_{v \in E^\mu} \|w_h - v\| \leq \hat{\delta}(E_h^\mu, E^\mu) \leq C'\|(T - T_h)|_{E^\mu}\|$$

genügt. Wir folgern unter Verwendung von Lemma 4.1.6

$$\begin{aligned} & \|((\mu - T)^l - (\mu - T_h)^l)w_h\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{l-1} (\mu - T_h)^j (T_h - T) (\mu - T)^{l-j-1} (w_h - \tilde{u}_h) + \tilde{u}_h \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{l-1} \sup_h \|(\mu - T_h)^j\| \|(\mu - T)^{l-j-1}\| \left(\|(T - T_h)\| \|w_h - \tilde{u}_h\| + \|(T - T_h)\tilde{u}_h\| \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{l-1} \sup_h \|(\mu - T_h)^j\| \|(\mu - T)^{l-j-1}\| \left(C'\|(T - T_h)\| \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| + \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|\tilde{u}_h\| \right) \\ &\leq C''\|(T - T_h)|_{E^\mu}\|. \end{aligned}$$

Da $k \leq l$ ist, folgt mit dem Binomischen Lehrsatz (der anwendbar ist, da Operatoren mit Skalaren vertauschen) und da w_h verallgemeinerter Eigenvektor k -ter Stufe zum Eigenwert μ_h ist:

$$\begin{aligned} \|(\mu - T_h)^l w_h\| &= \|((\mu - \mu_h) + (\mu_h - T_h))^l w_h\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l}{j} (\mu - \mu_h)^j (\mu_h - T_h)^{l-j} w_h \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=l-k+1}^l \binom{l}{j} (\mu - \mu_h)^j (\mu_h - T_h)^{l-j} w_h \right\| \\ &\leq C'''\|\mu - \mu_h\|^{l-k+1}, \end{aligned}$$

⁹Dass der Raum $\text{ran}((\mu - T)^l)$ ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} ist, folgt durch mehrmaliges Anwenden des Satzes von Riesz-Schauder (Satz 1.4.4).

für h klein genug. Mit dem letzten Ergebnis und (4.10) folgt:

$$\begin{aligned} \|w_h - u_h\| &\leq C\|(\mu - T)^l(w_h - u_h)\| \\ &= C\|(\mu - T)^l w_h\| \\ &= C\|((\mu - T)^l - (\mu - T_h)^l)w_h + (\mu - T_h)^l w_h\| \\ &\leq C(C''\|(T - T_h)|_{E^\mu}\| + C'''\|\mu - \mu_h\|^{l-k+1}). \end{aligned}$$

Setzen wir die Ungleichung von Satz 4.1.7 ein, folgt dann die Behauptung, da die rechte Seite in der Abschätzung von Satz 4.1.7 mittels $\|(T - T_h)|_{E^\mu}\|$ abgeschätzt werden kann. \square

Bemerkung 4.1.9

Die Aussagen dieses Abschnittes gelten in wenig modifizierter Form auch für kompakte Operatoren auf Banachräumen. In den Abschätzungen werden die Orthonormalbasen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ dann durch beliebige Basen, die konstruierte Basis $\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*$ wird durch eine (mit dem Satz von Hahn-Banach) zu φ_i duale Basis ersetzt und die Skalarprodukte werden durch Dualitätsklammern ersetzt. Es ist nicht wirklich aufwendiger, die obigen Sätze in dieser allgemeineren Form zu beweisen und tatsächlich werden sie von Babuška und Osborn in [2] auch so bewiesen. Jedoch muss man häufiger die Sätze von Hahn-Banach bemühen, die wir in der Hilbertraumversion ganz umgangen haben, und schließlich benötigen wir die obigen Sätze im folgenden Abschnitt eben in der Version für Hilberträume. Dennoch sei diese Verallgemeinerung hier nicht verschwiegen und für konkrete Formulierungen bzw. Beweise verweisen wir auf [2].

4.2 Spektrale Approximation variationeller Eigenwertprobleme

Wir werden nun die im letzten Abschnitt gewonnenen Aussagen über Konvergenz von Eigenwerten und Eigenvektoren auf den variationellen Fall übertragen. Seien dazu wie gehabt \mathcal{V} und \mathcal{W} Hilberträume und a und b stetige Sesquilinearformen auf \mathcal{V} , \mathcal{W} und sei b zusätzlich noch bezüglich einer kompakten Norm in \mathcal{V} stetig. Genüge weiter a den Inf-Sup-Bedingungen (2.3). Seien wie in Abschnitt 3 durch $V_h \subset \mathcal{V}$ und $W_h \subset \mathcal{W}$ endlichdimensionale Unterräume mit gleicher Dimension gegeben und genügen sie den diskreten inf-sup-Bedingungen (3.1) und der Konvergenzanforderung (3.2). Seien $T \in \mathcal{K}(\mathcal{V})$ und $T_* \in \mathcal{K}(\mathcal{W})$ die durch (2.4) definierten kompakten Operatoren und

seien T_h die durch (3.5) gegebene Familie von kompakten Operatoren. Nach Satz 3.2.4 konvergiert dann T_h in Norm gegen T für $h \rightarrow 0$.

Sei $\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von T und $\lambda := \frac{1}{\mu}$ ein Eigenwert des variationellen Problems (2.1) mit algebraischer Vielfachheit $m := m(\mu)$ und seien $\mu_{1,h}, \dots, \mu_{m,h}$ genau die m Eigenwerte von T_h , wiederholt nach algebraischer Vielfachheit mit $\mu_{i,h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mu$ und sei $\lambda_{i,h} := \frac{1}{\mu_{i,h}}$ für genügend kleine h (mit $\mu_{i,h} \neq 0$) und wie im letzten Abschnitt:

$$E_h^\mu = \bigoplus_{i=1}^m E^{\mu_{i,h}}.$$

Dann definieren wir nach Babuška und Osborn [2]:

$$\begin{aligned} M(\mu) &:= \{v \in E^\mu \mid \|u\|_{\mathcal{V}} = 1\}, \\ M^*(\mu) &:= \{w \in \overline{E}_*^{\bar{\mu}} \mid \|w\|_{\mathcal{W}} = 1\}, \\ M_h(\mu) &:= \{v \in E_h^\mu \mid \|v\|_{\mathcal{V}} = 1, \} \end{aligned}$$

wobei $\overline{E}_*^{\bar{\mu}}$ der verallgemeinerte Eigenraum des kompakten Operators T_* zum Eigenwert $\bar{\mu}$ ist¹⁰. Wir definieren weiter

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(\mu) &:= \sup_{u \in M(\mu)} \inf_{u_h \in V_h} \|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \\ \varepsilon_h^*(\mu) &:= \sup_{w \in M^*(\mu)} \inf_{w_h \in W_h} \|w - w_h\|_{\mathcal{W}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Das heißt $\varepsilon_h(\mu)$ ist ein Maß dafür, wie gut Elemente aus E^μ mittels V_h approximiert werden können. Wir werden nun eine Folgerung bzw. eine Variation von Satz 4.1.2 angeben, die uns eine Abschätzung des Abstandes verallgemeinerter Eigenräume in Größen erlaubt, die unserem variationellen Problem entspringen. Wir beginnen unsere Ausführungen mit einer Abschätzung des Ausdruckes $\|T - T_h\|$ durch ε_h .

Lemma 4.2.1

Unter den obigen Voraussetzungen gilt, für die Konstante γ_h aus den diskreten inf-sup-Bedingungen (3.1):

$$\|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \leq \frac{\|a\|}{\gamma_h} \|T\| \varepsilon_h.$$

¹⁰Im Abschnitt 2 haben wir gesehen, dass der Operator T_* ähnlich zu dem Operator T^* ist und daher ist $\bar{\mu} \in \sigma(T_*) = \sigma(T^*)$.

Beweis. Es gilt nach Satz 3.2.3 für alle $u \in \mathcal{V}$

$$\|Tu - T_h u\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\|a\|}{\gamma_h} \inf_{u_h \in V_h} \|Tu - u_h\|_{\mathcal{V}}.$$

Nun sei $u \in E^\mu$. Da E^μ T -invariant ist, folgt mit der Definition der ε_h

$$\inf_{u_h \in V_h} \|Tu - u_h\| \leq \varepsilon_h \|T\| \|u\|_{\mathcal{V}}.$$

Insgesamt also:

$$\|(T - T_h)|_{E^\mu}\|_{\mathcal{V}} = \sup_{u \in E^\mu} \frac{1}{\|u\|} \|Tu - T_h u\| \leq \frac{\|a\|}{\|u\| \gamma_h} \inf_{u_h \in V_h} \|Tu - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\|a\|}{\gamma_h} \|T\| \varepsilon_h.$$

□

Satz 4.2.2 (Abschätzung für die Konvergenz verallgemeinerter Eigenräume)
Es existiert eine von h unabhängige Konstante C , sodass

$$\hat{\delta}(E^\mu, E_h^\mu) \leq \frac{C}{\gamma_h} \varepsilon_h$$

gilt.

Beweis. Nach Satz 4.1.2 gilt:

$$\hat{\delta}(E^\mu, E_h^\mu) \leq C' \|(T - T_h)|_{E^\mu}\|_{\mathcal{L}(E^\mu, \mathcal{H})},$$

und daher unter Verwendung von Lemma 4.2.1:

$$\hat{\delta}(E^\mu, E_h^\mu) \leq C' \frac{\|a\|}{\gamma_h} \|T\| \varepsilon_h.$$

Dies ist für $C := C' \|a\| \|T\|$ die Behauptung. □

Um uns die Übertragung von Satz 4.1.5 und Satz 4.1.7 auf unser variationelles Problem etwas zu erleichtern, formulieren wir das folgende

Lemma 4.2.3

Es gilt für eine Orthonormalbasis $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ von E^μ und $\varphi_i^* := E(\mu)^* \varphi_i$:

$$\sum_{i,k=1}^m |((T - T_h)\varphi_i, \varphi_k^*)_{\mathcal{H}}| + \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^{\mu*}}\| \leq \frac{C}{\gamma_h} \varepsilon_h \varepsilon_h^*.$$

Beweis. Sei $v \in \mathcal{V}$ mit $\|v\|_{\mathcal{V}} = 1$ und sei $v^* \in \text{ran}(E(\mu)^*)$ mit $\|v^*\|_{\mathcal{V}} = 1$, so gilt für alle $w_h \in W_h$:

$$\begin{aligned} & ((T - T_h)v, v^*)_{\mathcal{V}} \\ &= a((T - T_h)v, A^{*-1}v^*) \\ &= a((T - T_h)v, A^{*-1}v^* - w_h) \\ &\leq \|a\| \| (T - T_h)v \|_{\mathcal{V}} \| A^{*-1}v^* - w_h \|_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

Nun ist $(A^*)^{-1} \text{ran}(E(\mu)^*) \subseteq \ker(\bar{\mu} - T_*) = M^*(\mu)$. In der Tat, für $z \in \mathcal{V}$ gilt:

$$\begin{aligned} (\bar{\mu} - T_*)A^{*-1}E(\mu)^*z &= (\bar{\mu} - A^{*-1}T^*A^*)A^{*-1}E(\mu)^*z \\ &= A^{*-1}(\bar{\mu} - T^*)E(\mu)^*z \\ &= 0, \end{aligned}$$

da mit Argumentation wie in (4.3) $E(\mu)^*z \in E^{\mu^*}$ ist. Somit folgt mit der ersten Abschätzung dieses Beweises:

$$((T - T_h)v, v^*)_{\mathcal{V}} \leq \|a\| \| (T - T_h)v \|_{\mathcal{V}} \| (A^*)^{-1} \| \varepsilon_h^* \quad (4.12)$$

und auch

$$\begin{aligned} \| (T^* - T_h^*)v^* \|_{\mathcal{V}} &= \sup_{v \in \mathcal{V}, \|v\|_{\mathcal{V}}=1} |(v, (T^* - T_h^*)v^*)| \\ &\leq \|a\| \| T - T_h \| \| (A^*)^{-1} \| \varepsilon_h^* \end{aligned} \quad (4.13)$$

für alle $v^* \in \text{ran}(E(\mu)^*)$ mit $\|v^*\|_{\mathcal{V}} = 1$. Somit gilt wegen (4.12) und dem Lemma 4.2.1:

$$\begin{aligned} ((T - T_h)\varphi_i, \varphi_j^*)_{\mathcal{V}} &= ((T - T_h)\varphi_i, E(\mu)^*\varphi_j)_{\mathcal{V}} \\ &\leq \|a\| \| E(\mu)^* \| \| (T - T_h) |_{E^{\mu}} \| \| A^{*-1} \| \varepsilon_h^* \\ &\leq \frac{C}{\gamma_h} \varepsilon_h \varepsilon_h^*. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Einsetzen der Definition von ε_h , (4.12) und (4.14) in die linke Seite der zu zeigenden Ungleichung liefert die Behauptung. \square

Mit dem soeben bewiesenen Resultat ist es uns möglich, eine Abschätzung für die Konvergenz von Eigenwerten und dem harmonischen Mittel in Größen ε_h und ε_h^* anzugeben.

Satz 4.2.4 (Abschätzung für die Konvergenz des harmonischen Mittels)
 Es existiert eine von h unabhängige Konstante C , sodass

$$\left| \lambda - \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_{j,h}^{-1} \right)^{-1} \right| \leq \frac{C}{\gamma_h} \varepsilon_h \varepsilon_h^*$$

gilt.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \left| \lambda - \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_{j,h}^{-1} \right)^{-1} \right| &= |\mu^{-1} - \hat{\mu}_h^{-1}| \\ &= \frac{1}{|\mu \hat{\mu}_h|} |\mu - \hat{\mu}_h| \\ &\leq C_\mu |\mu - \hat{\mu}_h|, \end{aligned}$$

wobei C_μ für genügend kleine h , von h unabhängig ist. Es folgt dann mit Satz 4.1.5 und Lemma 4.2.3

$$\begin{aligned} &\left| \lambda - \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_{j,h}^{-1} \right)^{-1} \right| \\ &\leq C_\mu |\mu - \hat{\mu}_h| \\ &\leq C_\mu \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |((T - T_h)\varphi_j, \varphi_j^*)_{\mathcal{H}}| + C \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^{\mu^*}}\| \right\} \\ &\leq \hat{C} \left\{ \sum_{i,k=1}^m |((T - T_h)\varphi_i, \varphi_k^*)_{\mathcal{H}}| + \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^{\mu^*}}\| \right\} \\ &\leq \frac{C}{\gamma_h} \varepsilon_h \varepsilon_h^*, \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Satz 4.2.5 (Abschätzung für die Konvergenz von Eigenwerten)
 Es existiert eine von h unabhängige Konstante C , sodass für die Aufsteigende α des Eigenwertes λ

$$|\lambda - \lambda_{j,h}| \leq C(\gamma_h^{-1} \varepsilon_h \varepsilon_h^*)^{\frac{1}{\alpha}}$$

gilt.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_{j,h}| &= |\mu^{-1} - \mu_{j,h}^{-1}| \\ &= \frac{|\mu_{j,h} - \mu|}{|\mu\mu_{j,h}|} \\ &\leq C_\mu |\mu_{j,h} - \mu| \end{aligned}$$

für h genügend klein, da dann $\mu_{j,h}$ genügend nah an μ ist. Mit Satz 4.1.7 und Lemma 4.2.3 folgt dann

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_{j,h}| &\leq C_\mu |\mu_{j,h} - \mu| \\ &\leq C_\mu \left\{ \sum_{i,k=1}^m |((T - T_h)\varphi_i, \varphi_k^*)_{\mathcal{H}}| + \|(T - T_h)|_{E^\mu}\| \|(T^* - T_h^*)|_{E^{\mu^*}}\| \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\leq C(\gamma_h^{-1} \varepsilon_h \varepsilon_h^*)^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

was die Behauptung war. \square

Bemerkung 4.2.6 (Abhängigkeit der Konstante von der Größe des Eigenwertes)

In den Beweisen der obigen Sätze können wir sehen, dass die Konstanten in unseren Abschätzungen größer werden, wenn der Eigenwert λ des variationellen Problems sehr groß wird. Denn dann wird $\mu = \frac{1}{\lambda}$ sehr klein und die Konstante

$$\frac{1}{|\mu\hat{\mu}_h|} \approx \frac{1}{|\mu|^2} = |\lambda|^2$$

ist sehr groß. Tatsächlich beobachten wir auch im numerischen Experiment, dass betragsmäßig kleine Eigenwerte des variationellen Problems besser approximiert werden als große Eigenwerte¹¹.

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir noch das zum Satz 4.1.8 gehörige Resultat in Ausdrücken des variationellen Problems, das unsere Sammlung von Abschätzungen für Eigenwerte und Eigenfunktionen kompletieren wird.

Satz 4.2.7 (Abschätzung für die Konvergenz von Eigenvektoren)

Sei λ_h ein Eigenwert des diskreten variationellen Problems mit $\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_h = \lambda$.

¹¹Siehe dazu zum Beispiel die Ergebnisse in [3, Teil 1] oder den folgenden Abschnitt 5.2.

Seien weiter $v_h \in V_h$ mit $\|v_h\| = 1$ und $(\lambda_h - T_h)^k v_h = 0$ für ein $k \leq \alpha$ und sei h genügend klein. Dann existiert für jedes l mit $k \leq l \leq \alpha$, ein $u_h \in \mathcal{V}$, sodass $(\mu - T)^l u_h = 0$ und

$$\|u_h - v_h\| \leq C(\gamma_h^{-1} \varepsilon_h)^{\frac{l-k+1}{\alpha}}$$

gelten.

Beweis. Nach Satz 4.1.8 gilt:

$$\|u_h - v_h\| \leq C' \|(T - T_h)|_{E^\mu}\|_{E^\mu}^{\frac{l-k+1}{\alpha}}$$

und mit Lemma 4.2.1 folgt

$$\|u_h - v_h\| \leq (C' \frac{\|a\|}{\gamma_h} \varepsilon_h \|T\|)^{\frac{l-k+1}{\alpha}},$$

was für $C := (C' \|a\| \|T\|)^{\frac{l-k+1}{\alpha}}$ die Behauptung ist. □

5 Symmetrische variationelle Eigenwertprobleme

In diesem Abschnitt wollen wir den wichtigen Sonderfall eines kompakten variationellen Problems betrachten, indem der Hilbertraum $\mathcal{V} = \mathcal{H}$ reell, a und b positive, symmetrische Bilinearformen sind, und a zusätzlich koerziv ist. Zuerst werden wir zeigen, dass der kompakte Operator T zu diesem Problem symmetrisch ist und folgern, dass alle Eigenwerte reell und positiv, und die geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte gleich der algebraischen sind. Dann werden wir das Hilfsmittel des Rayleigh-Quotienten einführen und die Babuška-Osborn-Theorie anwenden, um Abschätzungen für die Konvergenzordnung in diesem Spezialfall zu gewinnen.

Die Babuška-Osborn-Theorie über Konvergenzordnungen von Eigenwerten respektive Eigenvektoren haben wir im vorhergehenden Kapitel nur für komplexe Hilberträume formuliert. Sie lässt sich jedoch auf reelle Hilberträume übertragen, indem wir den Hilbertraum \mathcal{H} als Teilraum des komplexen Hilbertraumes $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \{x + iy \mid x, y \in \mathcal{H}\}$ mit dem Skalarprodukt $(x + iy, x' + iy')_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} := (x, x')_{\mathcal{H}} + (y, y')_{\mathcal{H}} + i((x, y')_{\mathcal{H}} - (y, x')_{\mathcal{H}})$ auffassen. Ebenso kann man die symmetrischen Bilinearformen auf \mathcal{H} genauso zu stetigen Sesquilinearformen $a_{\mathbb{C}}, b_{\mathbb{C}}$ auf $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ fortsetzen. Dann sind die Eigenwerte des komplexen

Problems immer noch reell und man kann zeigen, dass auch die Eigenvektoren als reell gewählt werden können. Somit können wir also die Ergebnisse aus dem komplexen auch auf den reellen, symmetrischen Fall übertragen. Für eine ausführliche Besprechung der Komplexifizierung eines reellen Hilbertraumes verweise ich auf [13, Kapitel 4, Abschnitt 4].

5.1 Untersuchung des symmetrischen Falls

Es seien \mathcal{W} , \mathcal{H} reelle Hilberträume, sodass $\mathcal{H} \subset\subset \mathcal{W}$ kompakt in \mathcal{W} eingebettet sei und

$$\begin{aligned} a &: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \\ b &: \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

seien stetige symmetrische Bilinearformen. Sei weiter a koerzitiv, d.h. es existiert ein $\gamma > 0$ mit:

$$a(u, u) \geq \gamma \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

und sei b positiv, d.h. es gelte:

$$b(u, u) > 0 \quad \forall u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}. \quad (5.1)$$

Dann ist $(\mathcal{H}, a(\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum, denn da a stetig und koerzitiv ist, ist die Norm $\|\cdot\|_a := \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$ äquivalent zu der von (\cdot, \cdot) erzeugten Norm, d.h. $(\mathcal{H}, a(\cdot, \cdot))$ ist vollständig. Betrachten wir also fortan \mathcal{H} als Hilbertraum mit Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$. Es genügt a damit den inf-sup-Bedingungen und somit ist der Operator T wohldefiniert (vgl. Lemma 2.2.2) und es gilt: $T = T_*$ (d.h. T ist selbstadjungiert bzgl. des Skalarproduktes $a(\cdot, \cdot)$). In der Tat gilt für beliebige $u, v \in \mathcal{H}$

$$a(Tu, v) = b(u, v) = b(v, u) = a(Tv, u) = a(u, Tv).$$

Nach dem Satz 1.4.8 besitzt T daher nur reelle Eigenwerte und somit besitzt auch das durch a und b erzeugte kompakte variationelle Eigenwertproblem nur reelle Eigenwerte. Weiter ist die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes gleich seiner algebraischen¹². Es folgt weiter für einen Eigenwert λ des variationellen Problems und einen zugehörigen Eigenvektor u wegen der Koerzitivität von a :

$$a(u, u) = \lambda b(u, u) > 0$$

und wegen (5.1) folgt daher $\lambda > 0$. Das heißt also, dass das variationelle Eigenwertproblem nur reelle positive Eigenwerte besitzt.

¹²Denn nach Satz 1.4.8 existiert eine Hilbertraumbasis aus Eigenvektoren für $\text{ran}(T)$.

Um eine Galerkindiskretisierung des variationellen Eigenwertproblems zu definieren, benötigen wir noch geeignete Ansatzräume. Sei also $H_h \subset \mathcal{H}$ eine Familie endlichdimensionaler Räume, die der Bedingung:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{u_h \in H_h} \|u - u_h\|_a = \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{u_h \in H_h} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H} \quad (5.2)$$

genügt. Es sind sowohl die kontinuierlichen, als auch die diskreten inf-sup-Bedingungen erfüllt und wir können die Konstanten γ_h in (3.1) ohne Einschränkungen als γ wählen und die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt sind anwendbar.

Seien nun $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die sortierten Eigenwerte des variationellen Eigenwertproblems wiederholt nach geometrischer (= algebraischer) Vielfachheit, und seien u_1, u_2, \dots die zugehörigen Eigenvektoren. Da T injektiv ist und wegen Satz 1.4.8 gilt weiter, dass $\overline{\text{span}\{u_1, u_2, \dots\}} = \mathcal{H}$. Weiter liefert Satz 1.4.8, dass man u_1, u_2, \dots o.B.d.A. als orthonormiert bezüglich a annehmen kann, d.h. es gelte:

$$a(u_i, u_j) = \lambda_j b(u_i, u_j) = \delta_{ij},$$

wobei

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das Kronecker-Symbol ist.

Wir werden nun ein wichtiges Werkzeug zur Untersuchung und Charakterisierung von Eigenwerten einführen.

Definition 5.1.1 (Rayleigh-Quotient)

Unter den obigen Bedingungen definieren wir die Abbildung

$$R : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \quad u \mapsto \frac{a(u, u)}{b(u, u)}$$

als den zum Eigenwertproblem gehörigen Rayleigh-Quotienten.

Der Rayleigh-Quotient charakterisiert Eigenwerte und Eigenvektoren des Eigenwertproblems über folgendes Minimum-Maximum-Prinzip

Satz 5.1.2 (Rayleigh Quotient)

Unter der Notation dieses Abschnittes gilt für V^k als Menge aller k -dimensionalen Untervektorräume von \mathcal{H} und $E^i := \text{span}\{u_i\}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min_{u \in \mathcal{H}} R(u), & u_1 &= \arg \min_{u \in \mathcal{H}} R(u), \\ \lambda_k &= \min_{E \in V^k} \max_{u \in E} R(u), & u_k &= \arg \min_{u \in \left(\bigoplus_{i=1}^k E^i\right)^\perp} R(u). \end{aligned}$$

Wobei die Orthogonalität bezüglich a gemeint ist.

Beweis. Siehe [3, Part 2, Abschnitt 7].

Nun definieren wir wie im Abschnitt über die Galerkin-Diskretisierung das diskrete Eigenwertprobleme:

Finde ein $\lambda_h \in \mathbb{R}$ und ein $u_h \in H_h$, sodass

$$a(u_h, w) = \lambda_h b(u_h, w) \quad \forall w \in H_h$$

gilt. Natürlich ist auch dieses diskrete Eigenwertproblem symmetrisch und besitzt daher nur reelle Eigenwerte (Die Matrizen, wie in (3.4) definiert, sind symmetrisch) und die Eigenwerte sind, da für ein Eigenpaar (u_h, λ_h)

$$a(u_h, u_h) = \lambda_h b(u_h, u_h) > 0$$

gilt, auch alle positiv.

Wenden wir nun den Satz 5.1.2 auf die Operatoren T_h an, dann folgt für V_h^k als Menge aller k -dimensionalen Unterräume von H_h :

$$\lambda_1^h = \min_{u \in H_h} R(u), \quad \lambda_k^h = \min_{E \in V_h^k} \max_{u \in E} R(u).$$

Aus dieser Beobachtung folgt, da $H_h \subset \mathcal{H}$ gilt

$$\lambda_k = \min_{E \in V^k} \max_{u \in E} R(u) \leq \min_{E \in V_h^k} \max_{u \in E} R(u) = \lambda_k^h. \quad (5.3)$$

Das heißt, die genäherten Eigenwerte sind immer größer als die eigentlichen Eigenwerte und wir haben, falls die Bedingung $H_{h_1} \subseteq H_{h_2}$ für alle $h_2 \leq h_1$ erfüllt ist, eine monotone Konvergenz des k -ten Eigenwertes des approximierenden Problems (dem Betrag an aufsteigend angeordnet) gegen den k -ten Eigenwert des ursprünglichen Problems.

In [3, Teil 2, Abschnitt 7] wird ausserdem gezeigt, dass durch die Monotonie der Konvergenz die Abstinenz von unechten Eigenwerten gesichert wird.

5.2 Implementierung des Laplace Eigenwertproblems in *Concepts*

Wir werden nun Ergebnisse eines numerischen Experimentes zur Eigenwertberechnung des Laplace Operators mit der Finiten Elemente Methode (FEM) angeben und mit Hilfe der Konvergenztheorie der Finiten Elemente Methode untersuchen, inwiefern die erzielten Ergebnisse mit den Erwartungen aus der Babuška-Osborn Theorie übereinstimmen. Wir formulieren noch einmal das Laplace-Eigenwertproblem, diesmal mit der speziellen Wahl des Gebietes $\Omega = (0, \pi)^2$.

Hierzu sei wie bereits in Beispiel 2.1.1 $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0^1(\Omega) \subset\subset \mathcal{L}^2(\Omega)$. Ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

wird dieser Raum zu einem Hilbertraum. Wie bereits in Beispiel 2.1.1 erwähnt, ist \mathcal{H} kompakt eingebettet in $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Unser Eigenwertproblem in klassischer Formulierung lautet:

Finde eine Funktion $u \neq 0$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass gilt

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

In variationeller Formulierung lautet es:

Finde ein $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \lambda \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Wie bereits in Beispiel 2.1.1 gesehen, werden durch

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ und durch

$$b(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

auf $\mathcal{L}^2(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$, stetige Bilinearformen definiert. Tatsächlich sind beide symmetrisch und koerzitiv, da sie das Standardskalarprodukt auf den jeweiligen Räumen bilden. Daher sind alle Ergebnisse des letzten Abschnittes anwendbar und wir wissen sofort, dass alle Eigenwerte positiv und reell sind.

Es ist bekannt (siehe dazu [3, Teil 1, Abschnitt 3]), dass alle möglichen Eigenwerte dieser Gleichung von der Form $\lambda_{n,m} = m^2 + n^2$ und die zugehörigen Eigenfunktionen von der Form $u_{n,m} = \sin(nx_1) \sin(mx_2)$ für $(x_1, x_2)^T \in \Omega$ sind.

Nun wählen wir, wie auch in den vorherigen Abschnitten, Ansatzräume, um eine Galerkindiskretisierung zu definieren. Die Finite-Elemente-Methode ist ein solches Galerkin-Verfahren, wobei der Ansatzraum aus stückweisen Polynomen besteht. Im Falle des Laplace-Problems auf dem Gebiet $(0, \pi)^2$, unterteilen wir das Gebiet in Abhängigkeit eines Parameters $N \in \mathbb{N}$ in 4^N kongruente Elemente (Untergebiete), sodass der reelle Parameter $h = \frac{\pi}{2^N}$ gerade die Länge einer Seite eines Teilquadrates ist (siehe Abbildung 1). Die einzelnen Quadrate mit Seitenlänge h nennen wir Elemente und die Gesamtheit aller Elemente, das heißt die Zerlegung von Ω , nennen wir Gitter.

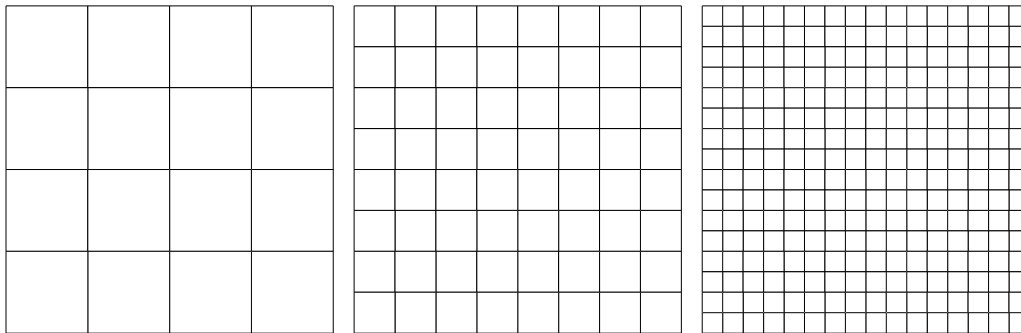


Abbildung 1. Eine Folge konformer, symmetrischer Gitter in *Concepts* ($N = 2, 3, 4$).

Für einen festen Polynomgrad m ist dann H_h^m der Raum der stückweisen Polynome vom Grad kleiner gleich m , sodass $v \in H_h^m$ eingeschränkt auf ein beliebiges Element aus dem Gitter ein Polynom vom Grad kleiner gleich m ist. Es existiert eine umfassende Konvergenztheorie für die Finite-Elemente-Methode in Abhängigkeit der Glattheit der Lösung, des Polynomgrades m und dem Gebiet Ω , die wir hier nicht studieren werden. Das für unsere Zwecke mehr als ausreichende, den Polynomgrad mitberücksichtigende Resultat

$$\sup_{u \in E^\lambda} \inf_{u_h \in H_h^m} \|u - u_h\| \leq Ch^m |u|_{m+1, \Omega},$$

liefert uns P.G. Ciarlet in [4, Kapitel III, Abschnitt 18]. Die Bedingungen an das Gitter sowie die „Form“ der einzelnen Elemente, als auch an die Glattheit der Lösung und den Grad der höchsten Ableitung, die in der Differentialgleichung vorkommen, sind in unserem einfachen Fall der Laplace Gleichung auf einem quadratischen Gitter, dass äquidistant unterteilt wird,

5.2 Implementierung des Laplace Eigenwertproblems in *Concepts*

Tabelle 1. Exakte Eigenwerte und deren Finite-Elemente-Approximation (gerundet auf 4 Nachkommastellen) mit linearem Ansatzraum ($m = 1$) in Abhängigkeit des Parameters N , berechnet mit *Concept* und *Arpack++*.

Exakte Lösungen	Lösungen mittels Finiten Elemente Methode				
	N = 8	N = 16	N = 32	N = 64	N = 128
2	2.1048	2.0258	2.0064	2.0016	2.0004
5	5.9158	5.2225	5.0549	5.0137	5.0034
5	5.9158	5.2225	5.0549	5.0137	5.0034
8	9.7268	8.4191	8.1033	8.0257	8.0064
10	13.8955	11.0932	10.2663	10.0660	10.0165
10	13.8955	11.0932	10.2663	10.0660	10.0165
13	17.7065	14.2898	13.3148	13.0781	13.0195
13	17.7065	14.2898	13.3148	13.0781	13.0195
Matrixgröße	9	49	225	961	3969
Einträge	49	361	1849	8281	34969

alle erfüllt. Der in der Abschätzung vorkommende Ausdruck $|u|_{m+1,\Omega}$ bezeichnet die Seminorm [4, Kapitel 1, Abschnitt 2] auf dem Unterraum $\mathcal{H}^{m+1}(\Omega)$ von $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Damit folgt für einen beliebigen festen Eigenwert λ der Differentialgleichung und mit ε_h definiert wie in (4.11) und $M(\lambda) := \{v \in E^\lambda \mid \|u\|_{\mathcal{H}} = 1\}$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_h &= \sup_{u \in M(\lambda)} \inf_{w_h \in H_h^m} \|u - w_h\|_{\mathcal{H}} \\
 &= \sup_{u \in E^\lambda} \inf_{w_h \in H_h^m} \|u - w_h\|_{\mathcal{H}} \frac{1}{\|u\|_{\mathcal{H}}} \\
 &\leq Ch^m \frac{|u|_{m+1,\Omega}}{\|u\|_{\mathcal{H}}} \\
 &\leq \hat{C}h^m
 \end{aligned}$$

mit einer von h unabhängigen Konstante \hat{C} . Hierbei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass der Raum E^λ endlichdimensional ist und daher die Normen $\|u\|_{\mathcal{H}}$ und $|u|_{m+1,\Omega}$ auf ihm äquivalent sind¹³. Da a (und daher der Operator T) symmetrisch sind, folgt weiter:

$$\varepsilon_h^* = \varepsilon_h \leq \hat{C}h^m.$$

¹³Die Seminorm ist eingeschränkt auf den Raum \mathcal{H} , aufgrund der Poincaré Ungleichung eine Norm.

5.2 Implementierung des Laplace Eigenwertproblems in *Concepts*

Tabelle 2. Exakte Eigenwerte und deren Finite-Elemente-Approximation (gerundet auf 4 Nachkommastellen) mit quadratischem Ansatzraum ($m = 2$) in Abhängigkeit des Parameters N , berechnet mit *Concept* und *Arpack++*.

Exakte Lösungen	Lösungen mittels Finiter Elemente Methode				
	N = 8	N = 16	N = 32	N = 64	N = 128
2	2.0010	2.0001	2.0000	2.0000	2.0000
5	5.0306	5.0021	5.0001	5.0000	5.0000
5	5.0306	5.0021	5.0001	5.0000	5.0000
8	8.0602	8.0041	8.0003	8.0000	8.0000
10	10.3002	10.0225	10.0015	10.0001	10.0000
10	10.3002	10.0225	10.0015	10.0001	10.0000
13	13.3298	13.0245	13.0016	13.0001	13.0000
13	13.3298	13.0245	13.0016	13.0001	13.0000
Matrixgröße	49	225	961	3969	16129
Einträge	385	2241	10561	45633	189505

Und mit dem Satz 4.2.5 folgt, da die Stufe jedes Eigenvektors 1 ist

$$|\lambda - \lambda_{j,h}| \leq C' \varepsilon_h \varepsilon_h^* \leq Ch^{2m}, \quad (5.4)$$

wobei $\lambda_{j,h}$ einer der m_λ Eigenwerte der Operatoren T_h ist, die gegen λ konvergieren (wobei m_λ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ ist). Ordnet man die Eigenwerte, wie wir es im positiven, symmetrischen Fall immer tun, aufsteigend nach Größe an, d.h. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ und gilt $\lambda = \lambda_n, \dots, \lambda_{n+m_\lambda}$ dann konvergieren, wenn man auch die Eigenwerte der T_h nach Größe anordnet, genau die Eigenwerte $\lambda_n^h, \dots, \lambda_{n+m_\lambda}^h$ gegen λ und obige Abschätzung liefert uns die Konvergenzordnung h^{2m} .

Die Finite-Elemente-Bibliothek *Concepts* (siehe dazu [7] und [12]) gibt uns die Möglichkeit, einen Finite Elemente Raum H_h^m auch für sehr große m zu generieren und die verallgemeinerten Eigenwertprobleme der generierten Matrizen intern unter Verwendung der Software-Bibliothek *Arpack++* (siehe dazu [10]), zu lösen.

Die Tabellen 1 bis 3 zeigen die durch dieses Verfahren gewonnenen Näherungslösungen für die ersten acht Eigenwerte und den Polynomgrad $m = 1, 2, 3^{14}$. Wie man anhand der Tabellen sieht, sind die approximierten Eigenwerte tatsächlich immer größer, als die exakten Eigenwerte. Genau das haben wir mithilfe des Rayleigh-Quotienten im letzten Abschnitt gesehen. Weiter sehen wir unsere Erwartungen bestätigt, dass die Eigenwerte schneller

¹⁴Die Quelltexte zur Berechnung der Werte in den Tabellen finden sich im Anhang A dieser Arbeit.

5.2 Implementierung des Laplace Eigenwertproblems in *Concepts*

Tabelle 3. Exakte Eigenwerte und deren Finite-Elemente-Approximation (gerundet auf 4 Nachkommastellen) mit kubischem Ansatzraum ($m = 3$) in Abhängigkeit des Parameters N , berechnet mit *Concept* und *Arpack++*.

Exakte Lösungen	Lösungen mittels Finiter Elemente Methode		
	N = 8	N = 16	N = 32
2	2.0000	2.0000	2.0000
5	5.0005	5.0000	5.0000
5	5.0005	5.0000	5.0000
8	8.0011	8.0000	8.0000
10	10.0125	10.0002	10.0000
10	10.0125	10.0002	10.0000
13	13.0131	13.0002	13.0000
13	13.0131	13.0002	13.0000
Matrixgröße	121	529	2209
Einträge	2049	10745	48585

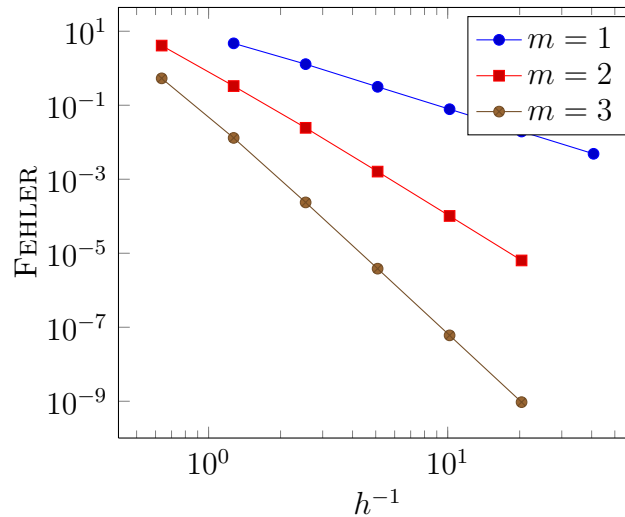


Abbildung 2. Der Fehler für den 8-ten Eigenwert in Abhängigkeit des Parameters $h^{-1} = \frac{2^N}{\pi}$ und des Polynomgrades m .

konvergieren (als Funktion von N bzw. h), je höher der Polynomgrad im Ansatzraum ist. Tatsächlich stellen wir mit Blick auf die Größe der Matrix und deren Anzahl besetzter Einträge fest, dass man für die gleiche Genauigkeit im Ansatzraum mit dem höheren Polynomgrad, ein Matrixeigenwertproblem geringer Dimension/Besetztheit lösen muss. Es scheint sich also zu lohnen den Polynomgrad zu erhöhen (anstatt N).

Die Abbildung 2 vergleicht die Abhängigkeit des Fehlers von dem Parameter h für verschiedene Polynomgrade und einen speziellen Eigenwert. Mit Blick auf die Gleichung (5.4) erwarten wir, dass der Fehler sich asymptotisch wie h^{2m} verhält. Tatsächlich sehen wir dies in der Abbildung bestetigt.

Fazit

Wir haben in der vorliegenden Arbeit gezeigt, dass sich unendlichdimensionale kompakte variationelle Eigenwertprobleme, die den inf-sup-Bedingungen genügen, mittels Galerkinapproximationen, die genügend große Ansatzräume umfassen, beliebig gut durch endlichdimensionale Eigenwertprobleme approximieren lassen. Die Babuška-Osborn Theorie stellt uns für diese Art der Approximation mächtige Werkzeuge zur Konvergenzabschätzung zur Verfügung. Den Begriff der unechten Eigenwerte haben wir jedoch nicht untersucht und lassen so, für nicht symmetrische Probleme, die Frage einer wohldefinierten Konvergenz offen (für weitere Informationen dazu, verweise ich auf [3]).

Im letzten Abschnitt haben wir den Sonderfall betrachtet indem unsere Bilinearform a ein reelles Skalarprodukt ist und b positiv. In diesem Fall haben wir gesehen, dass die Eigenwerte des variationellen Problems reell sind und man, bei einer monotonen Wahl von Ansatzräumen bei der Galerkinapproximation, eine monotone Konvergenz der Eigenwerte von oben erreicht. Zuletzt habe wir am Beispiel des Eigenwertproblems des Laplace-Operators gesehen, wie ein allgemeines Vorgehen zur Konvergenzanalyse und Lösung von Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen mittels Finiterelemente-Methode aussehen kann, wenn wir uns in dem Fall von Abschnitt 5.1 befinden.

Wir haben in dieser Arbeit nur einen kleinen Bereich der Eigenwertprobleme für partielle Differentialoperatoren betrachtet. Indem wir uns auf die Betrachtung von kompakten Eigenwertproblemen beschränkt haben, haben wir nur diskretes Spektrum zugelassen, indem Sinne, dass die Eigenwerte endliche Dimension besitzen und die Eigenwerte isoliert sind. Es ist jedoch von praktischer Relevanz und natürlich auch von theoretischem Interesse, inwiefern sich variationelle Eigenwertprobleme, die nicht äquivalent zu Eigenwertproblemen kompakter Operatoren sind, lösen oder nähern lassen. Solche Problemen treten zum Beispiel bei Eigenwertproblemen in gemischter Form auf (siehe [3, Part 3]).

Weiter haben wir die Frage ausgelassen, inwiefern denn die (eventuell sehr Großen) Eigenwertprobleme im endlichdimensionalen numerisch stabil lösbar sind.

A Quellcode zum numerischen Experiment

Hier aufgeführt ist die in C++ geschriebene Methode, die mittels der Finiten-Elemente-Bibliothek *Concepts* das Laplace Eigenwertproblem, für die kleinsten 8 Eigenwerte löst. Eingabeparameter sind der Polynomgrad und das Level der Verfeinerung des Gebietes.

```
1 #include "nQuads.hh"
2 #include "formula.hh"
3 #include "graphics.hh"
4 #include "function.hh"
5 #include "eigensolver.hh"
6
7 using namespace concepts;
8 using namespace std;
9
10 /*
11  *Calculates the solution of a PDE
12  *with homogenous dirichlet boundary condition,
13  *the right hand side f(x,y) sin(x) sin(y)
14  *on the 2d-domain [0 , %pi] x [0 , %pi]
15  */
16 void calculateLaplaceEquation(
17     hp2D::hpAdaptiveSpaceH1::hpAdaptiveSpaceH1 *space,
18     int numberOfEigVal,
19     double shift, int levelOfRef, int polDeg) {
20
21     /*Define operators*/
22     hp2D::Laplace<Real> la;
23     hp2D::Identity<Real> id;
24
25     /*Calculate stiffness matrix of the Laplace operator
26     *and the Matrix of the right hand side.*/
27     concepts::SparseMatrix<concepts::Real> stiff(*space, la);
28     concepts::SparseMatrix<concepts::Real> right(*space, id);
29
30     /*Solve general eigenvalue problem*/
31     eigensolver::ArPackppSymGen solver(numberOfEigVal,
32                                         stiff, right, 0.0);
33     concepts::Array<concepts::Real> ev = solver.getEV();
34
35     //Reserve memory for eigensolutions/eigenpairs
36     uint lengthOfAnEigVec = stiff.dimX();
```

```

37  concepts::DenseMatrix<concepts::Real> eigenVectors(lengthOfAnEigVec,
38                                     numberOfEigVal);
39  concepts::DenseMatrix<concepts::Real> eigenvalues(numberOfEigVal, 1);
40
41  //Write eigenpairs in matrices
42  concepts::Array<concepts::Vector<concepts::Real>*> evec
43                                     = solver.getEF();
44  for (uint i = 0; i < solver.converged(); ++i)
45      eigenvalues(i, 0) = ev[i];
46
47  for (uint i = 0; i < solver.converged(); ++i)
48      for (uint j = 0; j < lengthOfAnEigVec; ++j)
49          eigenVectors(j, i) = (*evec[i])[j];
50
51  //store matrices and eigenvectors
52  //as matlab readable .mat file
53  std::stringstream streamName;
54  concepts::MatfileOutput mo(streamName.str());
55  mo.addSparse(&stiff, "stiffness");
56  mo.addSparse(&right, "right");
57  mo.addDense(&eigenVectors, "eigenVectors");
58  mo.addDense(&eigenvalues, "EigenValues");
59  mo.closeMatfile();
60
61  //build concepts Vector for output
62  numberOfEigVal;
63
64  //hp2D::Grad<Real> function;
65  hp2D::Value<Real, Real> function;
66
67  //integration rule for output: equidistant
68  hp2D::IntegrableQuad::rule().set(concepts::TRAPEZE, true, 8);
69  space->recomputeShapefunctions();
70
71  //graphical output for all solutions as matlab plotable .mat file
72  //or paraview plotable .vtx file.
73  for (int i = 0; i < numberOfEigVal; ++i) {
74      std::ostringstream stream;
75      concepts::Vector<Real> sol(lengthOfAnEigVec);
76
77      for (uint j = 0; j < lengthOfAnEigVec; ++j)
78          sol(j) = eigenVectors(j, i);
79      graphics::MatlabBinaryGraphics(*space, stream.str(),

```

```

80             sol, &function);
81     stream << ".vtk";
82     graphics::VtkGraphics(*space, stream.str(),
83         sol, &function);
84 }
85 }
86
87 /**
88  *Function that uses given input to solve the
89  *laplace eigenvalue problem.
90  */
91 int main(int argc, char** argv) {
92
93     // ** handle input data **
94     std::string inputfile;
95     int opt;
96     int numberOfQuads = 1;
97     int levelOfRefinement = 1;
98     int polinomialDegree = 1;
99     int numberOfEigenvalues = 8;
100    double shift = 0.;
101
102    while ((opt = getopt(argc, argv, "-e:l:p:s:q")) != EOF)
103        switch (opt) {
104            case 'q':
105                numberOfQuads = std::atoi(optarg);
106            case 'l':
107                levelOfRefinement = std::atoi(optarg);
108                break;
109            case 'p':
110                polinomialDegree = std::atoi(optarg);
111                break;
112            case 'e':
113                numberOfEigenvalues = std::atoi(optarg);
114                break;
115            case 's':
116                shift = std::atof(optarg);
117                break;
118            default:
119                std::exit(1);
120                break;
121        }
122

```

```

123 //Build attributes for the boundary of the mesh
124 concepts::Array<uint> attr(4 + numberOfQuads * 3);
125 for (uint i = 0; i < 4 + numberOfQuads * 3; ++i)
126     attr[i] = i + 1;
127
128 //Build a mesh representing the domain (0, %pi)^2
129 NQuads mesh(attr, numberOfQuads);
130
131 //Set boundary condition
132 concepts::BoundaryConditions bc;
133 for (uint i = 1; i <= 5; ++i)
134     bc.add(concepts::Attribute(i), concepts::Boundary(
135         concepts::Boundary::DIRICHLET));
136
137 //Build Space
138 hp2D::hpAdaptiveSpaceH1::hpAdaptiveSpaceH1 space(mesh,
139     levelOfRefinement,
140     polinomialDegree, &bc);
141 space.rebuild();
142
143 //Print mesh as eps
144 std::stringstream stream;
145 stream << "mesh";
146 stream << levelOfRefinement;
147 stream << ".eps";
148 graphics::drawMeshEPS(space, stream.str());
149
150 //Solve EVP
151 calculateLaplaceEquation(&space, numberOfEigenvalues, shift,
152     levelOfRefinement, polinomialDegree);
153
154 return 0;
155 }

```

Literatur

- [1] P. M. Anselone. Collectively compact operator approximations. Technical Report 76, Stanford University, 1967.
- [2] I. Babuška and J. Osborn. *Handbook of Numerical Analysis*, volume II, chapter Eigenvalue Problems, pages 641–787. North-Holland, 1991.
- [3] D. Boffi. Finite element approximation of eigenvalue problems. *Acta Numerica*, 2010.
- [4] P. G. Ciarlet. *Handbook of Numerical Analysis*, volume II, chapter Basic Error Estimates for Elliptic Problems, pages 17–787. North-Holland, 1991.
- [5] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [6] G. Fischer. *Lineare Algebra*. Vieweg+Teubner, 2010.
- [7] P. Frauenfelder. *hp-Finite Element Methods on Anisotropically, Locally Refined Meshes in Three Dimensions with Stochastic Data*. PhD thesis, ETH Zurich, 2004.
- [8] T. Kato. Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. *Journal d'Analyse Mathématique*, 6(1):261–322, 1958.
- [9] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, 1980.
- [10] L. R.B. and D. Sorensen. Deflation techniques for an implicitly re-started arnoldi iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 17:789–821, 1996.
- [11] S. Sauter and C. Schwab. *Randelementmethoden*. Teubner, 2004.
- [12] K. Schmidt. *High-order numerical modeling of highly conductive thin sheets*. PhD thesis, ETH Zurich, July 2008.
- [13] J. Weidemann. *Lineare Operatoren im Hilbertraum*. Teubner, 2000.
- [14] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2007.
- [15] J. Xu and L. Zikatanov. Some observations on Babuška and Brezzi theories. *Numerische Mathematik*, (94):195–202, 2003.